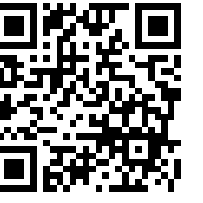
This is a reproduction of a library book that was digitized by Google as part of an ongoing effort to preserve the information in books and make it universally accessible.

Google™ books

https://books.google.com



Informazioni su questo libro

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

Linee guide per l'utilizzo

Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

Inoltre ti chiediamo di:

+ *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.

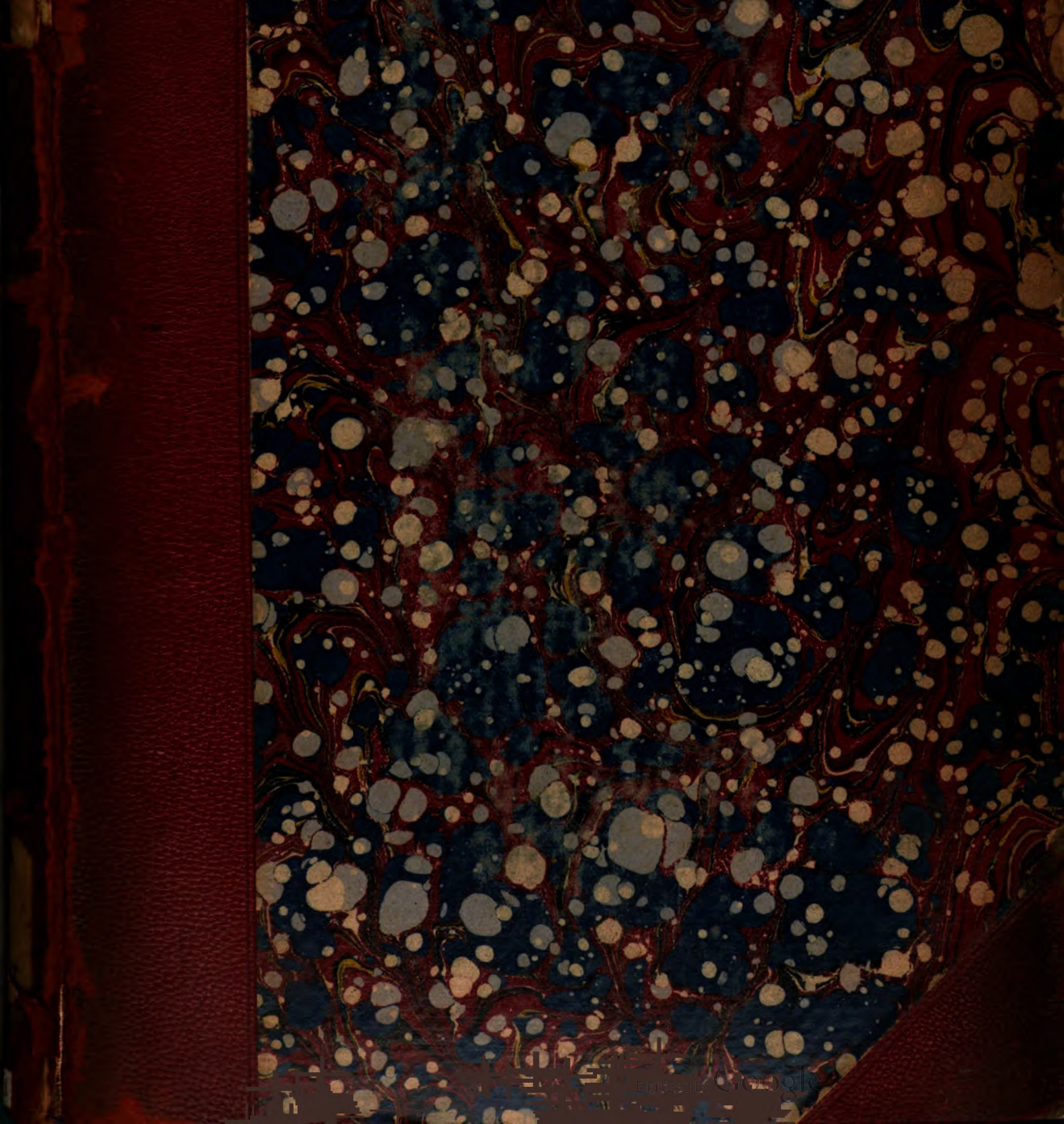
+ *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.

+ *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.

+ *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertati di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

Informazioni su Google Ricerca Libri

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da `http://books.google.com`


Digitized by Google

20

Class 7Ma4 Book

University of Chicago Libraries

GIVEN BY

Besides the main topic this book also treats of

Subject No.	On page	Subject No.	On page

Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

BOLLETTINO

DI

BIBLIOGRAFIA E STORIA

DELLE

SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA

DI

GINO LORIA

ANNO XI
1908 - 1909

TORINO
CARLO CLAUSEN (HANS RINCK Succ.)
Libraio delle LL. MM. il Re e la Regina

1909

Digitized by Google

Proprietá Letteraria

Digitized by Google

INDICE

G. Loria. Sopra un antico tentativo per dimostrare il teorema fondamentale della teoria delle equazioni algebriche, p. 33-37,

G. Vacca. Sulla quadratura del circolo secondo l'egiziano Ahmes, p. 65-66.

RECENSIONI ED ANNUNZI

M. Cantor. Vorl. über Geschichte der Mathematik, I Bd., III Aufl. (G. L.), p. 1-2. — **A. Wangerin.** Franz Neumann (G. L.), p. 3-4. — **D. E. Smith.** History of modern mathematics (G. L.), p. 4. — **M. C. P. Schmidt.** Kulturgeschichtliche Beiträge zur Kenntniss der griech. und röm. Altertums, I. (G. L.), p. 5-6 — **R. Bonola.** Die nicht-euklidischen Geometrie (G. L.), p. 6. — **J. Larmor.** Mem. and scientific correpondence of G. G. Stokes (G. L.), p. 6-8. — **W. Ahrens.** Briefwechsel zwischen C. G. Jacobi und M. H. Jacobi (G. L.), p. 8-9. — **P. Stäckel** und **W. Ahrens.** Der Briefwechsel zwischen C. G. Jacobi und P. H. Fuss (G. L.), p. 9. — **G. Fazzari.** Breve storia della matematica (G. L.), p. 10. — **L. Fuchs.** Werke, II Bd. (G. L.), p. 10. Oeuvres de P. L. Tchébychef, T. II (G. L.), p. 11. Oeuvres de C. Hermite, T. II (G. L.), p. 11-12. — **J. J. Sylvester.** Mathematical Papers, Vol. II (G. L.), p. 12. — **J. G. Hagen.** Synopsis der höheren Mathematik, III Bd. (G. L.), p. 12-13. — **C. J. Keyser.** Mathematics (G. L.), p. 14. — **C. M. Jessop.** A treatise on the line complex; **K. Zindler,** Liniengeometrie (G. L.), p. 14-17. — **A. Del Re.** Lezioni di algebra della logica (G. L.), p. 17-18. — **M. Chini.** Algebra (E. Daniele), p. 18-20. — **F. S. Palmieri.** Aritmetica e Algebra (G. Vivanti), p. 21. — **C. A. Laisant.** Iniziazione alle matematiche (G. L.), p. 21. — **M. Stuyvaert.** Les nombres positifs, p. 21-22. — **H. Schubert.** Auslese aus meiner Unterrichts-und Vorlesungspraxis, III (G. L.), p. 23. — **F. Enriques.** Fragen der Elementageometrie, II Tl. (G. L.), p. 24. — **C. Servais.** Cours de géométrie analytique (A. Clayes), p. 24-26. — **M. Stuyvaert.** Cinq études de géométrie analytique (G. Z. Giambelli), p. 26-27. — **Salmon-Fiedler.** Analytische Geom. de Kegelschnitten, VII Aufl., I Tl. (G. L.), p. 28. — **R. Heger.** Analytische Geometrie auf der Kugel (G. L.), p. 28-29. — **F. Klein.** Vorträge über den math. Unterricht, I Tl. (G. L.), p. 29. — **T. Reye.** Geometrie der Lage, II Abt. IV Aufl. (G. L.), p. 38-39. — **K. Doehlemann.** Geometrische Transformationen; **R. Sturm.** Die Lehre der geom. Verwandschxaften, I Bd. (G. L.), p. 38-41. — **E. Bertini.** Geometria descrittiva (E. Ciani), p. 41-48. — **P. Bachmann.** Neuere Zahlentheorie (M. Cipolla), p. 49-51. — **J. Sommer.** Vorl. über Zahlentheorie (M. Cipolla), p. 51-53. — **W. Scheibner.** Beiträge zur Theorie der lin. Transformationen (G. L.), p. 53-54. — **G. Petit-Bois** Tafeln unbestimmter Integrale (G. L.), p. 54. — **R. D'Adhémar.** Equations à dérivées partielles (G. Fubini), p. 55. — **Serret-Harnack-Scheffer.** Differential-und Integralrecbnung, Bd. I, II (G. L.), p. 56-57. — **U. Dini.** Analisi infinitesimale, Vol. I

Digitized by Google

(G. Vivanti), p. 57-58. — **Durège-Maurer.** Theorie der Funktionen einer komplexen veränderlichen Grösse (G. L.), p. 58-59. — **Durége-Maurer.** Elliptischen Funktionen (G. L.), p. 59-60. — **G. Fubini.** Teoria dei gruppi discuntinui (E. E. Levi), p. 67-73. — **G. Pagliero.** Applicationes de calculo infinitesimale (G. L.), p. 73. — **Fukusawa.** Vier mathematischen Abhandlunge (G. Vivanti), p. 74. — **Fukusawa.** Klassifikation der Unstetigkeiten (G. Vivanti), p. 74-75. — **M. Brückner.** Polyeder (G. L.), p. 75-77. — **E. Vecchietti.** L'infinito (G. Vivanti), p. 78-79. — **P. Rozè.** Règle à calculs (G. L.), p. 79. — Rassegna delle Dissertazioni di laurea recenti (G. L.), p. 79-73. — **F. Enriques** e **U. Amaldi.** Elementi di geometria (V. Amato), p. 83-85 (U. Amaldi), p. 126-7. — **O. Hesse** Analyt. Geometrie (G. L.), p. 86. — **F. Caldarera.** Primi fondamenti della geometria del piano e dello spazio (G. Z. Giambelli), 86-87. Annuaire du Bureau des longitudes 1909 (G. L.), p. 88. Taschenbuch für Mathematiker und Physiker (G. L.), p. 88-89. — **F. Klein.** Elementarmathematik, p. 89-91. — **F. Müller.** Fûbrer durch die mathem. literatur (G. L.), p. 97-99. — **W. W. Rouse Ball.** History of Mathematics (G. L.), p. 99. — **G. Loria.** Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche, III ed. (G. L.), p. 100-101. — **F. Rudio.** Der Bericht des Simplicius (G. L.), p. 101-102. — **Euler's.** Festschrift (G. L.), p. 103-104. — **G. Vassura.** La pubblicazione delle opere di E. Torricelli (G. L.), p. 104-105. — **T. L. Heath.** Euclidd's Elements (G. L.), p. 105-107. — **H. Burckhardt.** Entwickelung nach oscillirenden Functionen (G. L.), p. 107-108. — **D. E. Smith.** Rara Aritmetica (G. L.), p. 108-109. — **S. Pincherle.** Algebra complementare, Vol. II (U. Amaldi), p. 109-110. — **K. Hensel.** Alg. Zahlen, I Bd. (G. Vivanti), p. 111-117. — **A Schoenflies.** Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten (G. Vivanti), p. 117-120. — **H. Wieleitner.** Spezielle ebene Kurven (G. L.), p. 120-121. — **J. De Varguas y Aguirre.** Catalogo general de curvas (G. L.), p. 124-125. — **F. E. Wright.** Invariants of quadrati differential forms (G. L.), p. 127-128.

NECROLOGIO

A. von Braunmühl (S. Günther,) p. 60-64.

NOTIZIE

I premi dell'Istituto di Francia. F. Hultsch. Temi proposti dall'Acc. del Belgio, p. 31-32.

IV Congresso dei matematici, p. 64.

Un'opera in progetto. Congresso scientifico sud americano. Avvertimento. Un dizionario bio-bibliografico italiano. L'ultimo teorema di Fermat. E. Masekke. Una nuova formola di cronologia matematica. Tema proposto dall'Acc. di Napoli. Giubileo di G. H. Zeuthen. La nozione dell'infinito. Il valore della libra romana. Un'esposizione matematica. In memoria di P. Tannery, p. 91-96.

Digitized by Google

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E STORIA

DELLE

SCIENZE MATEMATICHE

ANNO XI — Gennaio, Febbraio e Marzo — 1908

Storia e Biografia

M. CANTOR — *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.* I Band: *von den ältesten Zeiten bis zum Jahre 1200 n. Chr.* Mit 114 Figuren im Text und 1 lithogr. Tafel. 3. Auflage. Leipzig, Teubner, 1907, 8° gr., p. VI+941 [Prezzo del vol. leg. Mk. 26.—].

Dopo un intervallo di tempo pressochè eguale a quello interposto fra gli anni di stampa (1880-1893) delle due prime edizioni, viene una terza volta pubblicato il primo volume della grande opera destinata a tramandare, circondato di gloria, alla posterità più remota, il nome venerando di Moritz Cantor. Se nel suo piano generale la terza edizione che annunciamo non presenta sostanziali differenze dalla precedente, si può dir non vi sia pagina che non abbia subita qualche miglioria e non siasi arricchita di qualche aggiunta, in gran parte grazie alle investigazioni compiute in quest'ultimo decennio per opera di storici e filologi: l'enumerarle riuscirebbe tedioso e di scarsissimo vantaggio, ma il segnalarne l'esistenza era per noi un imprescindibile dovere affinchè il lettore fosse posto sull'avvisato che non tutte le notizie che possono attingersi alle due prime edizioni corrispondono allo stato attuale delle nostre cognizioni storiche sull'antichità ed il medio evo (1). Però sulle più rilevanti modificazioni è còmpito nostro dir qualche parola.

Una importantissima è palese a semplice apertura di libro per lo scambio dei capitoli dedicati agli Egiziani ed ai Babilonesi, scambio necessitato da investigazioni recenti donde emerse avere questi preceduti quelli nello studio di quelle parti delle matematiche che trovano applicazione nella vita sociale: tuttavia la terra bagnata dal Nilo ha conservato la prerogativa di fornire allo storico la collezione più ricca di documenti importantissimi.

Ancora più radicali e profondi sono i mutamenti che subirono i capitoli dedicati a Erone; il che potevasi agevolmente prevedere,

(1) Si può solo lamentare che il Cantor non abbia che scarsamente utilizzate le numerosissime « Piccole osservazioni » intorno alla sua opera pubblicate da (ed in massima parte dovute) G. Enestrŏm nei volumi sinora usciti della *Bibliotheca mathematica.*

Digitized by Google

vantare — osserva il Wangerin — l'importanza di metodi puramente geometrici, nel trattare un ampio numero di problemi con metodo uniforme, Neumann non ha in Germania alcun predecessore. In considerazione di quel lavoro, io non esito a designarlo come un precursore di Steiner. Se il lavoro di Neumann fosse stato più noto, il suo nome sarebbe stato posto fra quelli di coloro a cui si è debitori del risveglio degli studi geometrici in Germania. »

G. L.

DAVID EUGENE SMITH. — *History of modern mathematics.* IV. ed. enlarged. I thousand. New York, 1906, 8°, p. 81. [Prezzo del volume legato, 1 dollaro].

Dieci anni fa venne pubblicato a New York un volume che, sotto il titolo *Higher Mathematics,* raccoglieva undici monografie su svariati soggetti di matematica superiore. L'ultima concerneva la storia della matematica moderna, ed è appunto quella di cui oggi annunziamo la ristampa. Piuttosto che una vera storia (a cui certamente non avrebbero bastate ottanta pagine!) si tratta di un elenco ragionato dei principali campi in cui di recente si aggirò il pensiero matematico e dei nomi di coloro che conquistarono il grado di capitani del valoroso esercito dei combatenti per la conquista del vero matematico. Gli argomenti trattati dall'A. sono: la teoria dei numeri; i numeri irrazionali, trascendenti e complessi; i quaternioni e l'« Ausdehnungslehre »; la teoria delle equazioni; le sostituzioni ed i gruppi; i determinanti; le forme; il calcolo infinitesimale; le equazioni differenziali; le serie infinite; la teoria delle funzioni; le probabilità ed il metodo dei minimi quadrati; la geometria analitica e la geometria moderna; la trigonometria e la geometria elementare e la geometria non euclidea.

Essendo stato tale lavoro stereotipato sin dal principio, non fu possibile all'A. correggere alcune inesattezze che la deturpano, nè modificare alcune asserzioni le quali, dopo dieci anni, suonano come anacronismi; ciò è da deplorare, trattandosi di un lavoro che conseguì già una diffusione, destinata ad accrescersi costantemente. L'A. avendo avvertito tale inconveniente, si sforzò di rimediarvi coll'aggiungere al suo scritto un epilogo relativo alle tendenze odierne della matematica moderna, a cui non si può far altro appunto che la brevità; è l'appunto che d'altronde si può rivolgere a tutta la monografia dell'egregio professore dell'Università di New York, alla quale è da augurare sia destinata la parte di araldo di una storia particolareggiata della moderna matematica.

G. L.

Digitized by Google

MAX C. P. SCHMIDT. — *Kulturhistorische Beiträge zur Kenntniss des griechischen und römischen Altertums.* I. HEFT. — *Zur Entstehung und Terminologie der elementaren Mathematik.* Leipzig, 1906, 8°, p. 134. [Mk. 2,40].

Il tema trattato in questo interessante opuscolo non entra nella cerchia di studi coltivati dai dotti italiani, i quali, se sono filologhi, poco s'interessano di quanto tocca le scienze esatte, mentre, se sono matematici, di regola non possiedono la profonda cultura linguistica che occorre per scoprire l'origine dei vocaboli scientifici da noi ereditati dai Greci e dai Romani. E poichè, invece, le osservazioni etimologiche formano un eccellente anello di congiunzione fra la scienza del linguaggio e le scienze positive, così noi segnaliamo il presente opuscolo a tutti quegli insegnanti delle nostre scuole classiche che sono animati dal nobile ideale di far *amare* la geometria di Euclide. L'opuscolo stesso non è che un frammento di un'opera di lunga lena, di una storia della cultura presso i Greci, che è da augurarsi il dotto autore possa condurre a termine. Il I. Cap. di esso contiene alcune osservazioni generali intorno alla terminologia della matematica moderna e tende a dimostrare che i termini tecnici della geometria sono di origine greca, quelli della teoria dei numeri di origine latina, mentre quelli (usati nella patria dall'A.) concernenti la teoria delle frazioni sono di origine tedesca. Segue un capitolo relativo alla terminologia scientifica dei Greci in generale, preludente ad altro sulla terminologia matematica in particolare, il quale a sua volta forma un naturale preludio al successivo, ove è stabilita l'origine pratica delle parole *punto, linea, retta, superficie, piano, limite, confine.* Per dare agli argomenti adotti tutta la forza di cui sono capaci, l'A. espone in un capitolo *ad hoc* la vita e la carriera scientifica di Talete da Mileto e ne trae una conferma all'asserto di Proclo che quel saggio trasferì in Grecia la geometria *pratica* degli Egiziani. Un successivo capitolo tratta dei vari istrumenti pratici usati dai geometri Greci: *riga, squadra, filo a piombo,* ecc.; dopo di che il filologo cede il posto allo storico, che narra le vicende delle scuole che ebbero le loro sedi a Mileto, Efeso, Samo, e per loro rappresentanti Talete, Pitagora, Eraclito. A Pitagora vien poi dedicato uno speciale capitolo, nel quale, quanto concerne questo grande filosofo e matematico vien liberato dalle fronde leggendarie di cui lo ornarono i moderni rinnovatori della filosofia pitagorica (1). La necessità di questa digressione storica è dimostrata dal capitolo seguente

(1) La stessa questione venne poi trattata da H. Vogt *(Die Geometrie des Pytagoras;* Bibl. mathem., III Ser., T. IX, 1908, p. 15-54), il quale concluse essere impossibile discernere l'opera del filosofo di Samo da quella dei suoi discepoli.

Digitized by Google

dedicato alla derivazione della parola « ipotenusa » e dalle successive considerazioni sulle dottrine musicali di Pitagora. Il capitolo che viene poi indica l'etimologia della parola « periferia », e quindi di nuovo entra in iscena lo storico per descrivere la vita e le opere di Euclide. Interessantissimi sono i seguenti capitoli relativi al calcolo numerico presso i Greci ed i Romani, i quali formano il naturale esordio a quello relativo alla terminologia latina dell'aritmetica elementare, con cui chiudesi il discorso volumetto.

Questo schema del lavoro del Prof. Schmidt, se non porge una idea adeguata della somma di geniali e profonde osservazioni da lui fatte, permette di rendersi conto della larghezza di criterii con cui egli ha svolto il suo tema; col fatto egli ha dimostrato come chi voglia determinare la derivazione dei termini tecnici di un scienza non possa attenersi esclusivamente a considerazioni filologiche, ma deve tener conto degli scienziati del tempo e della cultura (preso tale vocabolo nella più ampia accettazione) allora raggiunta. Le ricerche etimologiche intese in tal modo, mentre da un lato si fondano sugli ultimi risultati della critica storica, porgono un prezioso complemento alla storia dell'antico sapere; onde il lavoro in discorso è un modello che auguriamo venga ampiamente imitato.

G. L.

R. Bonola. — *Die nicht-euklidische Geometrie. Historisch-kritische Darstellung ihrer Entwickelung*. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1908, 8°, p. VIII+244. [Prezzo del vol. leg. Mk. 5].

È la traduzione tedesca di un'opera di cui venne reso diffusamente conto a suo tempo (v. *Bollettino,* t. IX, 1906, p. 107-109); le modificazioni e le aggiunte apportate dall'A. non sono di tale entità da giustificare una nuova analisi dell'opera. Basti questo semplice annunzio a mostrare come il giudizio pronunciato in generale sull'opera del Bonola sia conforme a quello che fu manifestato in queste colonne.

G. L.

Memoir and scientific correspondence of the late Sir George Gabriel Stokes. *Selected and arranged* by Joseph Larmor. Cambridge, University Press, 1907, 8°, Vol. I, p. XII+475; Vol. II, p. VI+507 [Prezzo dei due volumi legati Sh. 24].

Nessuna nazione può competere con l'Inghilterra per ricchezza di letteratura biografica; non soltanto poeti e letterati, storici, filosofi ed uomini politici, ma tutti i più eminenti cultori delle scienze positive — Newton e Faraday, Darwin e Huxley, Hamilton e Max-

Digitized by Google

well — trovarono diligenti e coscienziosi espositori della loro vita e dotti illustratori delle loro opere. Un nuovo anello si aggiunge a questa collana biografica con l'opera che oggi segnaliamo, dedicata alla memoria di un uomo a cui, in vita, furono tributati tutti gli onori ai quali uno scienziato può aspirare ed alla cui salma venne accordato un posto nell'Abbazia di Westminster, la Santa Croce dell'Inghilterra.

G. G. Stokes nacque il 3 agosto 1819 in un piccolo villaggio dell'Irlanda; per tre anni (1832-35) studiò a Dublino e poi nel collegio di Bristol. « Senior wrangler » e « first Smith's Prizeman » nel 1845, fu tosto nominato « Fellow » del Collegio Pembrocke di Cambridge, carica che dovette abbandonare nel 1857, quando prese moglie, e che rioccupò nel 1862, per effetto di nuovi statuti, sino al 1902, anno in cui divenne rettore di quell'istituto. Nel 1849 fu eletto Professore Lucasiano a Cambridge. Della Società Reale di Londra fu socio dal 1851, quindi segretario (1854-1885) e poi presidente (1885-1891); tutte le più celebri Accademie lo ascrissero fra i proprii membri; la Società Reale di Londra gli conferì prima la medaglia Rumford (1857) e poi quella Copley (1893); quella di Gottinga gli accordò (1877) la medaglia Gauss, l'Accademia francese la medaglia Arago (1899) e quella di Berlino la medaglia Helmholz (1901). Elevato al grado di Baronetto nel 1889, rappresentò dal 1887 al 1891 l'Università di Cambridge alla Camera dei Comuni. Il 50° anniversario della sua elezione a Professore lucasiano, diede occasione a feste memorabili, a cui partecipò tutto il mondo scientifico. Morì il 1° febbraio 1903.

L'opera da cui desumiamo tali notizie comprende: I. Uno schizzo biografico dell'illustre estinto, scritto da sua figlia. II. Le prime lettere di Stokes a sua moglie. III. Alcune notevoli sue lettere concernenti i rapporti fra scienza e religione, tema di incessanti meditazioni da parte di lui. IV. Alcuni giudizi pronunciati sulle sue opere e sul suo carattere, da eminenti scienziati che ebbero occasione d'avvicinarlo. V. Molte lettere scambiate fra Stokes ed altri investigatori su svariati argomenti scientifici, il cui elenco si desume dall'accuratissimo indice per materie (vennero escluse soltanto quelle numerosissime fra Stokes e Lord Kelvin, le quali daranno materia ad una speciale pubblicazione). VI. Gli indirizzi di congratulazione inviati a Stokes in occasione del suo giubileo.

Emerge da ciò che la parte veramente importante dell'opera in discorso è costituita dal carteggio scientifico, il quale forma un notevole complemento ai cinque volumi di *Mathematical and physical papers* dello Stokes. Ai quali, e non certo a detta opera, deve ricorrere chi voglia conoscere i cospicui contributi che egli potè dare alla fisica matematica, essendo provetto sperimentatore quanto

Digitized by Google

abilissimo nel maneggio dell'analisi più raffinata. Ciò vogliamo osservare affinchè il lettore non creda che i due annunziati volumi porgano un quadro dell'attività scientifica dello Stokes, comparabile per esattezza e genialità a quello che, ad esempio, il Brewster magistralmente delineò riguardo a Newton.

G. L.

W. AHRENS. *Briefwechsel zwischen C. G. J. Jacobi und M. H. Jacobi.* Mit zwei Bildnisse. *(Abh zur Geschichte da Mathematik,* XXII Heft). Leipzig, Teubner, 1907, 8°, pp. XX+282. [Mk. 7,50].

Il carteggio che annunciamo riesce per varie ragioni assai interessante. Prima di esse è l'alto posto nella gerarchia scientifica e sociale che occuparono durante la loro esistenza i due corrispondenti: uno dei quali è l'autore dei *Fondamenta nova* e l'altro, benchè certamente meno noto ai nostri lettori, conseguì a buon diritto immensa rinomanza, grazie ad un considerevole numero di invenzioni relative alla fisica applicata, di cui la più cospicua è forse la galvanoplastica.

Dato l'elevato livello intellettuale dei due fratelli Jacobi e la tendenza odierna di investigare il fondo dell'anima di coloro a cui l'umanità è debitrice di opere eminenti, un secondo e forte motivo d'interesse del presente carteggio è offerto dal grande numero di notizie sconosciute intorno alla vita e le opere di essi. I matematici, a cui specialmente ci dirigiamo, vi troveranno copiose osservazioni fatte da C. G. Jacobi su l'Italia e gli scienziati Italiani del tempo nel corso del celebre viaggio da lui compiuto presso di noi nel 1844. Vi troveranno poi ripetute attestazioni dell'interesse da lui provato e manifestato per una edizione completa delle opere complete di Eulero, *impresa colossale che il Secolo XIX lasciò al suo successore di compiere e che questo ha il dovere di intraprendere al più presto, facendo appello al buon volere ed alle forze di tutto il mondo civile.* Vi troveranno finalmente molteplici cenni dei vasti e profondi studi compiuti da Jacobi sulla matematica greca, cenni i quali dimostrano una nuova volta *quanto utile sarebbe raccogliere, coordinare, completare i frammenti che ne vennero già dati alla luce;* ci sia lecito augurare che il Sig. Ahrens, che a Jacobi ha già dedicato due coscienziosi lavori, vorrà accingersi a questo terzo che noi gli chiediamo ed arricchirne le *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik.*

Sorvolando sulle informazioni date dal presente carteggio intorno alla scorreria fatta dal Prof. Jacobi nella politica (cfr. *Bollettino,* T. IX, 1906, p. 127), perchè di esse già erasi giovato il signor

Digitized by Google

Ahrens, noteremo ancora come le lettere di cui parliamo riuscirebbero oscure per molti ed inintelligibili per moltissimi, ove l'editore non le avesse corredate di numerose ed esatte note esplicative ed illustrative, tratte in parte da pubblicazioni concernenti la prima metà del secolo scorso, ma in parte anche dal ricco archivio pietosamente conservato presso la famiglia Jacobi. In alcune appendici egli ha poi raccolto un piccolo numero d'importanti documenti che chiariscono certi punti essenziali della vita scientifica dei due protagonisti. Da ultimo con un copiosissimo indice egli ha reso agevole a tutti il farsi un chiaro concetto degli argomenti trattati e delle persone nominate.

Emerge da tutto ciò che, con il presente lavoro, il sig. Ahrens autorizza a nutrire la fiducia, sorta in seguito alle sue anteriori pubblicazioni, che egli sia uno dei pochi su cui la storia delle matematiche può ragionevolmente fare assegnamento pel presente e per l'avvenire.

G. L.

P. STÄCKEL und W. AHRENS. — *Der Briefwechsel swischen C. G. J. Jacobi und P. H. von Fuss, herausgegeben, erläutert und durch einen Abdruck der Fusschen Liste der Eulerschen Werke ergänzt.* Leipzig, B. G. Teubner, 1908. 8° gr., p. 184. [Prezzo Mk. 8].

Il grande interesse di Jacobi per la pubblicazione delle opere complete di Eulero è noto a tutti coloro che conoscono il carteggio (testè analizzato) da lui tenuto con suo fratello. Di tale interesse dànno nuove prove lampanti le interessantissime lettere che oggi annuciamo, le quali saranno di prezioso ajuto per coloro a cui verrà affidato il còmpito di soddisfare il voto tante volte espresso dall'immortale autore dei *Fundamenta nova*. La pubblicazione di esse ha oggi un carattere di attualità, perchè, dopo i voti dei congressi di Heidelberg e di Roma, dopo l'appoggio accordato dall'Associazione internazionale delle Accademie e dalla Società dei naturalisti svizzeri, la pubblicazione di tutti i lavori di Eulero può ormai considerarsi come una semplice questione di tempo. Coll'unire alla corrispondenza che annunciamo un Indice degli scritti del sommo analista, più perfetto di quelli redatti dal Fuss e dall'Hagen, i Sigg. Stäckel e Ahrens hanno pòrto un aiuto prezioso a chi sarà destinato a progettare e dirigere l'invocata edizione, ed in genere a tutti coloro che intendono occuparsi della produzione scientifica euloriana.

G. L.

Digitized by Google

G. FAZZARI. — *Breve storia della matematica, Dai tempi antichi al Medio Evo.* Milano-Palermo-Napoli, R. Sandron, 1907. 8°, p. 267 [Prezzo L. 4].

Questo volume — che fa parte della « Biblioteca Sandron » di Scienze e Lettere — sembra destinato ad un pubblico, non di specialisti, ma di persone fornite soltanto di una media cultura generale, onde potrà benissimo servire a porgere agli studenti delle nostre scuole medie quelle nozioni sulla storia delle matematiche che molti considerano siccome un utile complemento all'insegnamento di tali scienze. Nel comporre tale volume l'A. ha scelto in generale come guida le *Vorlesungen* di M. Cantor (sino al punto relativo a Luca Paciuolo inclusivamente) (1), adottandone il piano e la distribuzione della materia, mentre per quanto concerne il popolo dell'Antichità che maggiormente contribuì al progresso della geometria, egli attinse largamente ad un'opera relativa appunto a *Le scienze esatte nell'antica Grecia.*

L'A. possiede l'invidiabile qualità di farsi leggere volentieri; ond'è presumibile riesca a raccogliere intorno a sè uno stuolo di lettori, i quali faranno eco al nostro voto che egli si decida a narrare in un prossimo volume la storia delle matematiche in epoche più prossime a noi (2).

G. L.

Opere complete ed Enciclopedie

L. FUCHS. — *Gesammelte mathematische Werke. Herausgegeben von* R. FUCHS *und* L. SCHLESINGER. II. Band. Berlin, Mayer und Müller, 1906. 4°, p. X+487. [Mk. 30.—]

Le trentacinque memorie inserite in questo secondo volume di una pubblicazione già nota ai nostri lettori (v. *Bollettino,* VIII, 1905, p. 42) videro la luce per la prima volta negli anni 1875-1887 e si riferiscono alla teoria delle equazioni lineari ed alle funzioni modulari e, più generalmente, automorfe. Gli editori le sottoposero ad un'accurata revisione e notarono non solo gli errori di stampa e le sviste in cui l'A. incorse, ma anche i passi che per opera di altri ricevettero correzioni e miglioramenti. In una nota essi opportinente pubblicarono una lettera di Hermite che getta molta luce sulla genesi di alcune ricerche di Fuchs, e così accrebbero l'interesse che offre il volume che annunciamo.

G. L.

(1) L'A. abbandonò il proprio modello per quanto concerne i Cinesi, popolo che, per ragioni che ci sfuggono, egli passò completamente sotto silenzio.

(2) Per maggiori particolari si ricorra alle recensioni dell'opera in discorso scritte da C. A. Nallino in *Nuovi doveri* (Anno I, 1907) e da G. Loria in *La Cultura* (1907).

Digitized by Google

Oeuvres de P. L TCHÉBYCHEF, *publiés par les soins de* A. MARKOFF *et* N. SONIN. Tome II. (avec deux portraits). St. Pétersbourg 1907. 4o, p. XX+736 [Prezzo Mk. 17,50].

Otto anni trascorsero fra la pubblicazione del primo volume di questa importante collezione (cfr. *Bollettino,* III, 1900, p. 47) e quella del secondo, otto anni così tremendi per la Russia che era temibile altro tempo dovesse trascorrere prima che l'interrotto lavoro potesse venir ripreso e portato a buon termine. Il volume che oggi annunziamo è non certo di minore, anzi si dovrebbe dire, di maggiore importanza del primo, molte essendo le memorie ivi contenute che compaiono ora per la prima volta in forma intelligibile anche a chi non conosce il russo. Fra tali lavori notiamo una notizia autobiografica, che vide la luce in un « Dizionario di scrittori russi », e la Relazione di un viaggio di studî compiuto dal Tchébycheff nel 1852 a spese del patrio governo. Una piccola delusione prepara questo volume a chi contava di trovarvi completa la comunicazione « Sur la coupe des vêtements » fatta dal Tchébychef al congresso della « Associaton française pour l'avancement des sciences » tenuto a Parigi nel 1878; ora il testo di tale pubblicazione fu bensì trovato fra le carte lasciate dall'illustre estinto, ma senza la indicazione « stampare »; onde gli editori, rispettandone la volontà, non lo inserirono nella presente edizione.

I nostri lettori conoscono abbastanza l'opera scientifica dello Tchébychef, grazie ad un'esauriente analisi fattane in queste colonne dal Prof. Vasilieff (*Bollettino,* I, 1898); onde qualunque nostra parola intesa a dimostrare l'importanza dell'impresa condotta a termine dai sigg. Markoff e Sonin riuscirebbe almeno superflua.

G. L.

Oeuvres de CHARLES HERMITE, *publiés sous les auspices de l'Académie des sciences par* EMILE PICARD. Tome II. Paris, Gauthier-Villars, 1908 [Prezzo fr. 18].

Questo secondo volume della raccolta delle opere complete del grande analista francese comprende i lavori pubblicati nel periodo 1858-1875 e va adorno di un ritratto fatto quando Hermite era cinquantenne. Esaudendo il voto da noi altra volta espresso (cfr. *Bollettino,* IX, 1906, p. 38) l'illustre editore per ogni lavoro indicò esattamente l'anno ed il luogo di prima pubblicazione; giovandosi poi della collaborazione del Sig. H. Bourget egli potè rilevare e correggere alcuni errori esistenti nei coefficienti di numerici di certe formole date da Hermite; ciò accresce il valore della presente pubblicazione; ma sarebbe stato ottimo consiglio di indicare quali sono i coefficienti corretti e quali valori aveva loro attribuito Hermite

Digitized by Google

stesso; ciò avrebbe reso possibile a tutti il determinare, senza ricorrere alle pubblicazioni originali, quali delle conseguenze che altri trasse dalle formole in questione esigano qualche ritocco.

Fra i lavori inseriti nel volume in discorso, spiccano per celebrità ed importanza quelli relativi alla risoluzione delle equazioni di quinto grado mediante funzioni ellittiche; degli altri non ci è possibile ricordare nemmeno i titoli, se non vogliamo oltrepassare i limiti imposti al presente annunzio. G. L.

J. J. SYLVESTER. — *The collected mathematical papers.* Vol. II (1854-1873), with two plates. Cambridge, University Press, 1908. 8°, p. XVI+731.

Questo nuovo volume di una pubblicazione, che già venne segnalata ai nostri lettori (v. *Bollettino,* VIII, 1905, p. 53), non è certamente meno interessante del primo, anzi si potrebbe dire di più perchè, dando notizia dei frutti raccolti dall'autore nella sua età matura, contiene la maggior parte dei lavori che assicurano al Sylvester fama imperitura. Basti, per dimostrare la verità dell'asserto, ricordare le investigazioni di eccezionale importanza da lui compiute per dimostrare la celebre regola di Newton relativa alle radici reali delle equazioni algebriche. Il carattere impulsivo dell'autore, visibile nei suoi lavori giovanili, non si modificò radicalmente col crescere degli anni; ne fanno fede le correzioni che egli stesso ravvisò necessarie in alcuni lavori (riprodotti nel volume in discorso) pubblicati con eccessiva precipitazione. Ai futuri biografi del Sylvester va segnalata una lezione di prova da lui tenuta nel 1854 in qualità di candidato ad una cattedra, che, se non erriamo, non gli fu aggiudicata; chi, invece, più che a risultati matematici s'interessa alla filosofia della scienza, leggerà con grande interesse il discorso da lui tenuto nel 1869 come presidente di sezione all'Associazione Britannica per l'avanzamento della scienza, al quale l'editore fece giudiziosamente seguire alcuni commenti dell'autore e i documenti relativi ad una discussione che esso provocò in Inghilterra. Altro non diciamo, perchè, se volessimo riferire tutte le cose belle che contiene il volume in discorso, non sarebbe sufficiente un'intera annata del *Bollettino*! G. L.

JOHANN G. HAGEN. — *Synopsis der höheren Mathematik,* III. Band. *Differential-und Integralrechnung.* Berlin, L. Dames, 1900-1905. 4°, p. VI+471. [Mk. 35.—]

Durante il non breve intervallo di tempo che durò la stampa di questo volume della ben nota opera del Prof. Hagen, venne attivamente proseguita la compilazione dell'*Enciclopedia* delle quattro

Digitized by Google

Accademie, la quale, da alcuni punti vista, può sembrare aver comuni con la *Synopsis* il fine ed i mezzi; ma una semplice ispezione comparativa dei due lavori ne mette in luce le differenze profonde: ben a ragione quindi l'A. sostiene (nell'*Avvertenza,* stampata nella parte interna della copertina) che la *Synopsis* ha la propria ragione di esistere anche dopo la pubblicazione dell'*Enciclopedia.*

Quali siano i criterii ed i metodi usati dall'A. è noto a tutti coloro che ebbero occasione di consultarne i due primi volumi: egli dà le definizioni e teoremi relativi alle singole teorie, indicando le fonti più importanti a cui devesi ricorrere per apprendere le relative dimostrazioni e maggiori sviluppi. Essendo egli un profondo conoscitore ed un entusiasta ammiratore di Eulero, tutte le idee ed i procedimenti a questi dovuti trovano nella *Synopsis* la debita considerazione; ma a dimostrare che egli seppe accordare il posto dovuto alle produzioni di coloro che vennero dopo di Eulero, basti rilevare la parte fondamentale da lui a ragione accordata ai concetti di Lie.

L'intera opera è divisa in otto grandi sezioni, aventi i seguenti soggetti: *Gli elementi del calcolo differenziale. Gli elementi del calcolo integrale. Nuovi metodi di calcolo. I gruppi di trasformazione. Equazioni differenziali in generale. Equazioni differenziali tra due variabili. Equazioni differenziali totali. Equazioni a derivate parziali.* Ogni sezione è divisa in parecchi capitoli ed ulteriormente suddivisa, sicchè la ricerca di quanto può occorrere riesce agevole; tanto più che l'intera opera si chiude con un particolareggiato indice per materie Il presente volume, dunque, ha tutte le qualità che contraddistinguono le migliori opere di consultazioni, e come tale va a tutti caldamente raccomandata.

All'A. (il quale, essendo divenuto Direttore della Specola Vaticana, può essere annoverato fra coloro che coltivano in Italia le scienze esatte) vada il nostro augurio di poter compiere ben presto la colossale impresa a cui si è sobbarcato! G. L.

CASSIUS JACKSON KEYSES. *Mathematics.* A lecture delivered at Columbia University in the series on science, philosophy and art, october 16, 1907. New-York, the Columbia University Press, 1907, 8°, pp. 44.

Per ragioni tipografiche il titolo di questa lettura non può venir qui riferito con tutta l'esattezza consueta: chè non fu possibile riprodurre la corona che l'A. fece imprimere sul nome della scienza di cui, col presente lavoro, volle celebrare le glorie; tale dignità regale conferitale in un paese repubblicano è un fatto che non può passar inosservato, giacchè è un primo indizio dei sentimenti che

Digitized by Google

Un concetto generale del piano di detto volume emerge dai capitoli che lo costituiscono e che giova qui riferire

I. *Il sistema nullo ed il complesso lineare.* — II. *Applicazioni alla teoria del movimento, alla meccanica ed alla statica grafica.* — III. *Coordinate di una retta, considerata come raggio o come asse; equazioni fra tali coordinate.* — IV. *Complessi e congruenze; loro applicazioni meccaniche.* — V. *Elementi immaginari.* — VI. *La varietà costituita dai complessi lineari, con applicazioni alla teoria delle forze e dei movimenti.*

Nel I. Cap. notiamo che l'A. prende le mosse dal movimento elicoidale, dando così ad intendere come egli concepisca la geometria della retta come indissolubilmente legata alla cinematica Il III. contiene forse la più particolareggiata ed estesa trattazione elementare a noi nota della teoria delle cordinate di retta, la quale riuscirà utilissima per coloro a cui occorre famigliarizzarsi con l'impiego di siffatto istrumento. Nel IV. rileviamo l'esauriente classificazione delle congruenze lineari, le semplicissime espressioni delle coordinate di un elemento di un tal sistema di rette in funzione razionale d'un parametro e le conseguenti analoghe espressioni per le coordinate di una retta qualunque di un complesso lineare; interpretando geometricamente tali formule si ottengono tutte le proprietà delle rappresentazioni di una congruenza e di un complesso, sopra di un piano o lo spazio, fatto su cui, secondo noi, sarebbe stato opportuno l'estendersi più di quanto fece l'A. E poichè questi sembra dare a ciò considerevole importanza, notiamo che egli ha additata una costruzione semplicissima della congruenza lineare priva di direttrici reali, che abilita a formarsi un chiaro concetto di tale figura. Utilissima riuscirà a molti studenti la circostanziata esposizione analitico-geometrica della teoria degli immaginarii contenuta nel Capitolo V, mentre il VI servirà di solido ponte per chi voglia raggiungere la teoria gli spazi a più dimensioni. Sopra altri punti che offrono qualche novità ci è forza sorvolare, data la esiguità dello spazio a nostra disposizione.

***

Passando dal primo al secondo volume dell'opera in esame avviene un completo mutamento di scena; si abbandona il dominio della geometria proiettiva per occupare quello della geometria differenziale, sicchè, mentre per intendere il primo bastano le nozioni somministrate nel primo anno del corso universitario, il secondo è riserbato a colui pel quale la geometria infinitesimale non ha più misteri. Tale volume, in cui la meccanica non ha alcuna parte, consta di tre lunghi capitoli dedicati complessivamente a le *Rigate,*

Digitized by Google

le *Congruenze* e di *Complessi* (1); l'esposizione è caratterizzata nello spirito e nella forma dall'uso sistematico di rappresentazioni parametriche, ad introdurre le quali nello studio dei sistemi di 2 o 3 rette, l'A. venne indotto dagli splendidi risultati che tale artificio diede in quello delle curve e delle superficie. Con tale metodo non solo egli potè ottenere, coordinare e chiarire con nuova luce tutti i teoremi sull'argomento scoperti dai geometri che se ne occuparono da Chasles ad Antomari, da Hamilton a Koenigs, da Malus a Clebsch, Klein e Voss, ma fece quà e là delle aggiunte di metodo e di sostanza che meriterebbero di essere ricordate in una esauriente analisi dell'opera in discorso; il lettore che voglia conoscerle, senza ricorrere all'opera stessa, consulti il diligente rapporto dell'A. sopra *Die Entwickelung und der gegenwärtigen Stand der differentiellen Liniengeometrie* (Jahresber. d. Deutsch. Mathem., Vereinig., T. XV, 1906).

Non ci è lecito passare sotto silenzio come un illustre matematico, a cui la geometria della retta deve moltissimo, ha rilevato sotto forma un po' rude alcune inesattezze in cui lo Zindler incorse (2), il che diede origine ad una replica da parte di questo (3). Ora riuscirebbe vano ogni tentativo per negare tali imperfezioni; ma, secondo noi, si tratta piuttosto che di lesioni profonde minaccianti la stabilità dell'edificio, di screpolature superficiali capaci soltanto di deturparne l'apparanza esteriore.

Un terzo volume, dedicato ai complessi quadratici ed alle congruenze algebriche completerà l'opera; la cui utilità pei principianti (notiamolo finendo) è aumentata da una buona *Collezione di esercizii* e dalla *Guida a risolverli,* date dall'A. come appendici a ciascun volume.

G. L.

Algebra della logica

A. DEL RE. — *Lezioni di algebra della logica, ad uso degli studenti della Facoltà di matematica, di filosofia e lettere, dettate nella R. Università di Napoli.* Napoli, Tip. della R. Accademia delle Scienze, 1907, 8°, pp. VIII+104 [Prezzo L. 3,50].

Le pubblicazioni di logica matematica che da un paio di decenni vedono la luce in Italia sono tutte strettamente legate a quelle del Prof. Peano e sono caratterizzate dall'essere ivi ridotto al mi-

(1) Per aggiunte e rettifiche a questo Capitolo si ricorre all'articolo dell'A. *Zur Differentialgeometrie der Linienkomplexe* (Monatshefte f. Math. und Phys., T. XVII, 1906).

(2) Jahresbericht der deutschen Mathematiker Vereinigung. Bd. XIV, 1905, p. 14, e Bd. XV, 1906, p. 464.

(3) Id. Bd. XV, 1906, p. 542.

Digitized by Google

nimo l'apparato dialettico e dato per compenso il più ampio sviluppo alle applicazioni alla geometria ed all'algebra. Un indirizzo totalmente diverso ha invece il volumetto che oggi annunziamo, nel quale è esposto un algoritmo analogo ma non identico a quello dell'algebra ordinaria e capace di surrogare il consueto procedimento ragionativo. È quel calcolo che, seminato dal Boole e sapientemente coltivato dallo Schröder, presentasi oggi quale pianta rigogliosa ed annovera in America ed in Inghilterra una schiera di valorosi cultori. Grazie a tale sua indole il lavoro del Prof. del Re colma una lacuna che esisteva nella nostra letteratura scientifica; quale ne sia il contenuto dice il seguente

SOMMARIO: I. *Nozioni generali.* — II. *Primo sistema di postulati e concreta interpretazione di essi.* — III. *Proposizioni fondamentali.* — IV. *Legge di reciprocità di Peirce e Schröder.* — V. *Le inclusioni logiche.* — VI. *Le funzioni logiche; i loro sviluppi; i loro discriminanti.* — VII. *Le equazioni logiche; i loro sistemi.* — VIII. *Il processo di eliminazione; le risultanti.* — IX. *La risoluzione delle equazioni logiche.* — X. *Il problema generale di Boole. Metodo dl Schöder per risolvere le equazioni logiche.*

Come risulta da questo schema l'A. non ha creduto opportuno di mostrare sopra alcuna applicazione l'uso ed il valore dei procedimenti esposti; onde alla domanda *à quoi bon?* che spontaneamente si affaccia alla mente del lettore, il Prof. del Re non dà la minima risposta. Per la qual cosa, nell'interesse stesso delle sue idee, non gli va tributata lode. *Unus non sufficit!* E noi auguriamo che in un altro volume egli faccia conoscere « la severa ricostruzione delle matematiche operata dall'algebra della logica », di cui egli parla nella dedica alla memoria di Luigi Cremona. G. L.

Aritmetica ed Algebra elementare

M. Chini. — *Lezioni di Algebra ad uso dei Licei.* Vol. I, pag. IX-166 [Prezzo L. 4,80]; Vol. II, pag. IX-172 [Prezzo L. 1,80]. Livorno, Giusti, 1908.

I due volumetti d'Algebra, pubblicati il primo l'estate scorsa ed il secondo recentemente dal Prof. Chini, possono dare una idea delle difficoltà che deve vincere chi intenda di preparare un buon corso di lezioni d'Algebra per i tre anni di liceo, conformemente agli ultimi programmi: difficoltà che consistono, pel primo anno, non soltanto nell'esporre per intero e col dovuto rigore tutto ciò che i programmi richiedono, ma anche, e forse più, nell'evitare di invadere certi campi nei quali si è quasi trascinati dalle necessità di un'esposizione logica e organica; e, per gli altri due anni, nel raccordare la nuova materia a quella già svolta, senza incorrere in ripetizioni eccessive, sfruttando invece con intelligenza le nozioni,

Digitized by Google

in parte necessariamente incomplete, che su certi argomenti si sono già date. Il Chini, insegnante notoriamente abile ed efficace, è riuscito ottimamente nella lotta contro queste difficoltà.

E difatti tutto quello che dai programmi del primo anno si domanda intorno ai principii del calcolo algebrico, alle equazioni di 1° e 2° grado, alle progressioni ed ai logaritmi, trova nel primo volume il suo svolgimento completo; mentre d'altra parte non si può dire che vi sia nulla più di quanto è strettamente necessario. Veramente nel discorrere delle radici quadrate e dei logaritmi è fatto cenno delle specie di numeri irrazionali che a queste operazioni si connettono: oltrepassando in ciò i programmi, che escludono dal primo anno di liceo la teoria degli irrazionali. Ma è chiaro che il far diversamente sarebbe impossibile per chi non intendesse di abbassare l'insegnamento liceale a quello puramente pratico ed inorganico dei primi anni del ginnasio. Tanto più che l'introduzione e l'uso di quelle tali specie di irrazionali son fatti dal Chini in modo da non compromettere per nulla la trattazione *ab ovo* che gli irrazionali più generali dovranno ricevere in una classe successiva. Le difficoltà di svolgimento della materia degli ultimi due anni furono superate, nel volume II., non meno felicemente: nè vi è da farne meraviglia, se si pensa che sono certo maggiori, dal lato dell'esposizione, le difficoltà che offriva il volume I.

L'A. divide il volume I. in tre Parti, seguite da un'Appendice. La prima Parte contiene le operazioni elementari sui *numeri segnati* (razionali). Noteremo l'uso, abbastanza frequente, di considerazioni geometriche intese a semplificare il ragionamento ed a facilitare la comprensione: veggasi, ad es., nel Cap. II. la dimostrazione della proprietà associativa della somma, e nel Cap. IV le dimostrazioni delle proprietà fondamentali della disuguaglianza. È pure in questa prima Parte che è fatto, nel Cap. VIII (Radici), il primo cenno dei numeri irrazionali. Nella seconda Parte sono esposto le regole solite del calcolo letterale, limitate, naturalmente, al campo razionale. Alle equazioni di 1° e di 2° grado è dedicata la terza Parte, che comincia molto opportunamente, col dare il concetto di funzione ad una o più variabili. La discussione delle formole risolutive è fatta in modo rapido ma completo, appoggiata a numerosi e adatti esempi.

L'appendice tratta delle progressioni e dei logaritmi. Questi ultimi appaiono forse un po' sacrificati in omaggio ai poco felici programmi: certo a leggere la dimostrazione della proprietà fondamentale della funzione logaritmica (pag. 148) e le applicazioni del n. 135 (pag. 152) vien da pensare (ciò che del resto già succede alla lettura del capitolo dove si studiano le equazioni di 2° grado) se non sarebbe forse il caso, nella scuola e quindi nei libri di testo, una ribellione contro le strettoie e le illogicità a cui è condannato ufficialmente l'insegnamento dell'Algebra nei licei.

Digitized by Google

Il volume II., è diviso a sua volta in quattro Parti ed in una Appendice. La prima Parte comprende, oltre alla formola della potenza n^{ma} del binomio, la teoria dei radicali, seguita dall'introduzione delle potenze ad esponente fratto, negativo nullo. La seconda Parte è dedicata a completare la teoria delle equazioni di 1° e di 2° grado; degno di nota è sopratutto il Cap. I., per la discussione ampia e rigorosa dell'equivalenza di due equazioni dedotte, nei modi più comuni, l'una dall'altra. Dei tre Capitoli che costituiscono la terza Parte, i primi due contengono, dopo rapidi richiami alle proprietà più elementari dei numeri primi, la decomposizione di un numero in fattori primi, nonchè la ricerca del M. C. D. e del M. C. M.; nel terzo è fatta l'applicazione della teoria dei numeri primi all'analisi indeterminata di 1° grado: questo argomento, in sè stesso assai elegante, dà luogo ad uno dei Capitoli più attraenti del libro.

Si giunge così, colla Parte quarta, alla teoria degli irrazionali: la definizione vi è data, seguendo l'uso generale, col mezzo delle classi contigue, ed il rigore, col quale gli irrazionali vengono introdotti, non si smentisce in tutta la teoria dei numeri reali che si va svolgendo fino al Cap. VI. La Parte quarta termina con un Capitolo dedicato ai logaritmi, ai quali ora si giunge coll'inversione della funzione esponenziale: naturalmente l'A. ha cura di notare come la definizione di logaritmo decimale — data nel volume I. colle due progressioni, una aritmetica ed una geometrica — conduca agli stessi logaritmi che si avrebbero colla nuova definizione assumendo la base uguale a 10. Infine l'Appendice contiene in poche pagine quanto è strettamente necessario per imparare il maneggio delle tavole logaritme, e per comprendere di quale utilità possano essere i logaritmi nei calcoli numerici.

Tanto il primo che il secondo volume si chiudono con una raccolta non abbondante, ma ben scelta, di esercizi.

L'esposizione del prof. Chini è condotta in modo che, mentre può accontentare un insegnante anche difficile, dall'altro lato non riesce affatto pesante alla lettura e non è destinata a produrre nei giovani quel senso di stanchezza e di ripulsione caratteristico di certi trattati pure eccellenti per molti riguardi. Si potrà osservare che nell'*Algebra* del Chini manca quella nota di spiccata originalità che è la preoccupazione prima di molti Autori: gli insegnanti di buon senso riconosceranno però quanto più utile sia stata l'opera dell'A., se in luogo di escogitare nuovi metodi di esposizione, — nei quali non sempre il progresso, rispetto agli antichi, eguaglia la pretensione con cui vengono presentati — preferì impiegare la sua intelligenza e la sua pratica della scuola a dare la forma migliore ai metodi che l'esperienza rivelò come i più opportuni.

E. DANIELE

Digitized by Google

F. S. PALMIERI. — *Elementi di aritmetica e algebra per le scuole medie di secondo grado.* Parte prima. Messina, Trimarchi, 1908, 8°, p. III+329. [Prezzo L 3].

Questo trattato s'ispira ai metodi introdotti dalla logica matematica. L'aritmetica viene fondata sulle *idee primitive di numero* e di *numero successivo,* e su alcune *proposizioni elementari* dalle quali risulta il *principio d'induzione.* Lo svolgimento procede rapido e serrato, dai primi elementi, attraverso a tutta la teoria dei numeri razionali positivi e negativi, sino al calcolo letterale ed alla risoluzione dei sistemi d'equazioni lineari per mezzo dei determinanti. Se il libro, malgrado il linguaggio conciso e rigidamente logico usato dall'autore, sia facilmente accessibile alle tenere menti degli alunni dei Ginnasi e degli Istituti tecnici, è questione sulla quale non oseremmo pronunziarci; l'esperienza della scuola può solo deciderla. Lodevole è il sistema di far seguire a ciascun capitolo un cenno storico sulle teorie in esso trattate.

G. VIVANTI

C. A. LAISANT. — *Iniziazione alle matematiche.* Operetta dedicata agli amici dell'infanzia. Traduzione di G. Lazzeri Firenze, G. Barbera, 1908. 8°, p. XIII+171 [Prezzo L 2].

Questa traduzione, che segue a breve distanza la seconda edizione di un'opera già nota ai nostri lettori (v. *Bollettino,* IX, 1906, p. 75-76), mostra come il giudizio da noi su di essa pronunciato sia conforme a quello generale; perciò a noi basti augurare che, trasferita in Italia, essa dia, anche presso di noi, quei buoni risultati che è ragionevole attenderne; ad es., quale utile suggerimento essa è capace di porgere a chi deve insegnare nelle nostre scuole la geometria intuitiva!

G. L.

M. STUYVAERT. — *Les nombres positifs Exposé des théories modernes de l'arithmétique élémentaire.* Gand, E. van Goethem, 1906. 8°, p. XII+132. [Prezzo 3 fr.].

Indice:

Cap. I. *I numeri interi.* 1. Teoria dell'addizione degli interi. 2. Teoria della sottrazione degli interi. 3. Teoria della moltiplicazione degli interi. 4. Teoria della divisione degli interi. 5. La numerazione decimale. 6. Regole per le operazioni nel sistema decimale. 7. Vari sistemi di numerazione. 8. Divisibilità. 9. Caratteri di divisibilità nel sistema decimale. 10. Massimo comun divisore. 11. Mi-

Digitized by Google

nimo multiplo. 12. Decomposizione in fattori primi. 13. Teoria generale dei caratteri di divisibilità.

Cap. II. *I numeri frazionari.* 1. Frazioni ordinarie. 2. Numeri decimali. 3. Conversione delle frazioni.

Cap. III. *I numeri incommensurabili.* 1. Radice quadrata. 2. Radice cubica. 3. Teoria dei numeri incommensurabili. 4. Teoria delle proporzioni. 5. Teoremi sui limiti. 6. Approssimazioni numeriche. 7. Operazioni abbreviate.

Cap. IV. *La misura delle grandezze.* 1. Insiemi numerabili. 2. Grandezze usuali. 3. Calcolo con numeri complessi.

Estratto dalla Prefazione:

« Noi postuliamo che l'addizione degli interi è un'operazione commutativa; è questa una proposizione che può certamente venir dimostrata; ma tale dimostrazione renderebbe i principii lunghi e noiosi. È dunque un postulato non necessario, ma particolare al nostro sistema; o, se meglio piace, noi cominciamo l'aritmetica a questo punto. La prima operazione impossibile è la sottrazione e la prima estensione del numero dovrebbe logicamente essere il numero negativo. In ciò noi non seguimmo la logica, essendo d'uso in Francia ed in Belgio di studiare i numeri negativi soltanto nel corso d'algebra. D'altronde in tale sistema vi è qualche cosa più del capriccio, cioè di tradizione; giacchè i numeri frazionari e incommensurabili vengono ad intercalarsi fra gli interi per formare un tutto continuo, mentre i numeri negativi costituiscono un prolungamento di questo insieme. Tuttavia, bisogna riconoscerlo, l'esclusione dei numeri negativi rende certi capitoli un po' penosi, specialmente la teoria dei limiti... Le proposizioni relative alle operazioni fondamentali sono indipendenti dal sistema di numerazione; noi le esponiamo sin dal principio, rappresentando senz'altro i numeri mediante lettere; malgrado le apparenze, questa notazione non è più astratta della notazione con cifre. E quanto al sistema di numerazione, esso è sempre una combinazione di operazioni fondamentali; ad es. la proprietà di qualunque numero di potere essere espresso in cifre non è che una applicazione della divisione... L'introduzione delle frazioni ci è costata più fatica. Oltre il metodo di esposizione da noi adottato e che è quello scelto da Schubert nel suo articolo dell'*Enciclopedia* .... Le estrazioni di radici guidano ai numeri incommensurabili La teoria di tali numeri è fondata sulla nozione di « taglio » degli insiemi come nell'*Algebra* del Weber... Per le approssimazioni numeriche, noi definiamo soltanto gli errori assoluti... Per le operazioni abbreviate noi diamo anzitutto il metodo di Oughtred per la moltiplicazione; ed utilizziamo il risultato di questo metodo per semplificare l'esposizione di due divisioni abbreviate: una è dovuta a Fourier; l'altra è una variante di quella di Guy, meno approssimata, ma più facile a spiegare... »

Digitized by Google

Geometria elementare

H. SCHUBERT. — *Auslese aus meiner Unterrichts -- und Vorlesungs praxis.* III. Band. Leipzig, Goeschen, 1906. 8°, pag. 250. [Prezzo del vol. leg. Mk. 4].

Una buona metà del nuovo volume dell'interessante opera del Prof. Schubert (pei volumi precedenti veggasi *Bollettino*, VIII, 1905, p. 109, e IX, 1906, p. 90) è dedicato alla determinazione dei centri di gravità, argomento che, mentre un tempo occupava molto spazio nei manuali di calcolo integrale e meccanica razionale, oggidì è trascurato; l'A. stabilisce le relative formole generali e poi le applica ad un grande numero di esempi interessanti, somministrati in gran parte dalla teoria delle curve piane notevoli.

La II. Sezione ha per iscopo di mostrare come si possano agevolmente stabilire le più essenziali proprietà della parabola servendosi soltanto dell'equazione cartesiana della curva, riferita all'asse ed alla tangente al vertice, e della corrispondente equazione della tangente; ne va raccomandato la lettura a tutti gli studenti di geometria analitica. La III. Sezione contiene una deduzione elementare della legge di Snellio sulla rifrazione, per mezzo del principio del lavoro minimo, notoriamente suggerito da Fermat.

Maggiore originalità presentano le due Sezioni seguenti, le quali costituiscono notevoli contributi alla stereometria in senso stretto. Nell'una, infatti, è introdotto un nuovo poliedro particolare (il *Parallelkantner* o *tronco di prisma*) come generalizzazione dell'ordinario prisma retto e ne è mostrato l'uso e l'importanza; nell'altra poi si legge una estensione della nota formola concernente il volume d'un obelisco, che non tarderà a venir introdotta nei trattati di geometria dello spazio.

Nella seguente Sezione (VI) l'A. propone e svolge una nuova procedura per giungere alle formole della trigonometria sferica. Allo stesso ramo delle matematiche è consacrata l'ultima parte del volume in esame, giacchè ivi l'A. si propone di estendere ai poligoni sferici le ricerche sui poligoni piani eroniani che tanto spazio occuparono del II. volume dell'*Auslese*. Tali nuove ricerche, oltre al loro interesse intrinseco, ne possiedono uno considerevole, in quanto costituiscono un lemma alla determinazione dei poliedri eroniani, la quale attualmente si trova al di là dei confini del nostro sapere matematico; possa tale preparazione condurre ben presto ad un nuovo importante capitolo della geometria elementare!

G. L.

Digitized by Google

F. ENRIQUES. — *Fragen der Elementargeometrie. Deutsche Ausgabe von* Dr. Hermann FLEISCHER. II Teil: *Die geometrischen Aufgaben, ihre Lösung un Lösbarkeit.* Mit 135 Figuren im Text. 8°, pp. XII+348. Leipzig, B. G. Teubner, 1908 [Prezzo del vol. leg. Mk. 9].

L'originale dell'opera di cui annunziamo la traduzione è nota ai nostri lettori (v. *Bollettino,* T. III, 1900, p. 77) ed in genere a tutti coloro che s'interessano di geometria. Il volume che abbiamo sott'occhio comprende gli articoli che in origine portavano i numeri VII-XIV e venne pubblicato prima di quello destinato a contenere gli altri articoli affinchè surrogasse un noto opuscolo del Prof F. Klein, omai esaurito e di cui l'illustre autore non concesse una nuova edizione, ritenendo a ciò preferibile l'attuale volume. Tutti quegli articoli vennero, si può dire, rifatti, per completarli e far loro raggiungere il livello delle nostre cognizioni attuali. Totalmente nuovo è l'articolo con cui il volume si chiude, il quale contiene « Alcune osservazioni generali sopra i problemi di geometria », con le quali il Prof. Enriques dà un prezioso complemento a quanto esposero i suoi collaboratori.

Emerge da tutto ciò che non a torto il traduttore afferma che si è in presenza di un'opera nuova. Come tale era dover nostro segnalarla e raccomandarla anche a coloro che insegnano o studiano geometria al di qua delle Alpi.

G. L.

Geometria analitica

C. SERVAIS. — *Cours de géometrie analytique de la Faculté de Sciences.* Gand, Van Goethem, 1906 (Autographe. 4°, pp. 188+188).

Cet ouvrage se distingue particulièrement par un exposè rigoureux, clair et méthodique, ainsi que par la nature et l'uniformité des méthodes employées. Dans son esquisse de l'Histoire des Mathématiques en Belgique (1), M. Mansion dit que, « dans ce cours de Géométrie Analytique, M. Servais expose plus systématiquement et plus logiquement qu'aucun autre géomètre, le principe des signes, et les notions relatives aux éléments à l'infini ou imaginaires ». Malgré sa concision et sa rigueur, cette exposition est accessible aux commençants, si on limite les théorèmes au seul cas des courbes du

(1) Revue des questions scientifiques, janvier 1907, t. LXI, pp. 270-285. Supplément de Mathesis, avril 1907.

Digitized by Google

second degré. Au surplus, les éléves ingénieurs y sont initiés rapidement aux principes généraux de la Géomètrie Projective, qui leur donnent la construction des formes projective et des courbes du second degré, determinées par les éléments points ou tangentes. On remarquerà l'usage constant des coordonnées homogènes dans les questions ou peuvent se présenter, comme cas particuliers, des éléments à l'infini, et l'emploi des coordonnées trilinéaires dans les propriété projectives, afin de simplifier le calcul, d'y introduire de la symétrie et d'avoir les résultats les plus généraux, sans discussion et sans cas d'exception.

Le sommaire un peu étendu donnera une meilleure idée des méthodes employées et de l'enchainement des matières traitées.

Tome I. Chap. I. ***Principe des signes.*** § 1. Segments. Egalités fondamentales. Relation de Pappus. § 2. Projections. Coefficient de projection. § 3. Angles. Angle de deux semi-droites. § 4. Ponctuelle et faisceau ; détermination d'un élément. Point à l'infini d'une ponctuelle. § 5. Rapport anharmonique. § 6. Rapport harmonique. Chap. II. § 1. ***Du point.*** Coordonnées d'un point d'une ponctuelle. § 2. ***De la ligne droite.*** Condition pour que trois points soient en ligne droite. Coefficients de direction d'une droite. § 3. Equations de la ligne droite. § 4. Applications. Aire du triangle. § 5. ***Coordonnèes homogénes.*** Point à l'infini. Droite à l'infini du plan. (Dans toute cette introduction on utilise systématiquement la discussion des équations linéaires.) Chap. III. § 1. Interprétation géométrique des équations. § 2. Transformation des coordonnées. § 3. ***Imaginaires.*** Droites isotropes. Point cycliques. Formules relatives aux ponctuelles imaginaires. Formule de Laguerre. Directions asymptotiques. § 4. ***Lieux géométriques.*** Parties parasites Chap. IV. § 1. ***Coordonnées trilinéaires,*** (qui sont définies par la substitution linéaire la plus générale, qui aura dans la suite d'autres interprètations géométriques): 1° formules pour changer de triangle de référence ; 2° équations de projectivité entre deux systémes plans ; 3° équation de réciprocité. Exercices. § 2. ***Polaires.*** Théorème de Côtes. Tangente. Faisceau de tangentes. Point double. Régions positives et négatives. § 3. Asymptotes. Chap. V. § 1. ***Coordonnès tangentielles.*** Théorie corrélative de la précédente. Chap. VI ***Projectivité.*** § 1 Formes projectives. § 2. Formes superposées. § 3. Formes perspectives. § 4. Involution. Chap. VII. ***Courbes du second degré.*** § 1. Cercle. § 2. Classification des courbes du second degré d'après les directions asymptotiques. Réduction du premier membre à une somme de carrés. Classifications par les points doubles. § 3. Pôles et polaires dans les coniques. § 4. Polaires réciproques. §. 5. Formes projectives dans les coniques. Théorémes de Pascal et de Brianchon Construction des formes projectives à l'aide d'un cercle § 6. Centre, pôle de la droite a l'infini. Diamètre, polaire

Digitized by Google

d'un point à l'infini. Diamètres conjugué. §. 7. Axes. Equation en S. §. 8. Invariants. Chap. VIII. *Courbes à centre.* § 1. Réduction de l'équation. Asymptotes. Axes. § 2. Propriètès des diamètres conjugués. § 3. Constructions. § 4. Tangente et normale. Chap. IX. *Parabole.* § 1. Réduction de l'équation. § 2. Tangente et normale. Chap. X. *Foyers.* § 1. Définition de Plücker. Détermination des foyers. § 2. Propriétés des foyers. Deux de ces propriétés se déduisent immédiatement de l'identification de l'équation des tangentes menées d'un point avec celle du faiscea . des droites isotropes issues de ce point. Directrice. Propriétés des foyers déduites des formes projectives. Coordonnées polaires. Chap. XI. *Faisceau de coniques.* § 1. Faisceau ponctuel. Théoréme de Poncelet. Théoréme de Sturm. § 2. Faiscean tangentiel. § 3. Coniques homofocales, considérées comme formant un faiscean tangentiel. Chap. XII. § 1. Systémes plans projectifs, § 2. Systémes plans projectifs superposès. Homologie. § 3. Figures homothétiques. § 4. Systèmes plans réciproques. Chap. XIII. § 1. Coordonnées normales. § 2. Coordonnées barycentriques.

Le tome II, qui traite de la géomètrie de l'espace, a été conçu d'après le même plans. Les démonstrations employées dans le tome I s'étendent presque toujours d'elles même à la géométrie de l'espace. Nous signalons cependant à l'attention du lecteus la discussion nouvelles de l'intersection de deux surfaces du second degré, et la manière dont sont présentées dans ce tome les coordonnées barycentriques et normales.

Ce court aperçu donnera une idée, incomplète malheureusement, de la manière dont M. Servais expose la Géométrie Analytique à ses éléves. Ce cours s'adresse à des étudiants, ayant subi une éprenue de géométrie analytique plane à leur examen d'admission; nous n'exagérons pas en disant qu'il constitue un modéle au point de vue didatique; l'éloge qu'en fait le distingué mathématicien M. Mansion en est une peuve indiscutable.

A. CLAEYS

M. STUYVAERT. — *Cinq Études de Géométrie analytique. Applications diverses de la théorie des matrices et de l'élimination.* — « Mem. della Società Reale delle Scienze di Liegi », 1908.

Questa bella Memoria, alla quale è stato concesso dalla Reale Accademia del Belgio il premio F. Deruyts, rappresenta un nuovo indirizzo nello studio della Geometria analitica. Come osserva l'A., in Geometria, applicando la teoria dell'eliminazione tra due equazioni algebriche, si utilizza quasi sempre solo la condizione di esistenza di una sola radice comune. Tenendo invece conto della condizione di esistenza di più radici comuni, si giunge a risultati molto più generali e più importanti. Considerando la teoria dell'eli-

Digitized by Google

minazione da questo nuovo aspetto, l'A. ottiene notevoli proposizioni sulla Geometria specialmente dello S_3 e dello S_4. Alcune di queste sono già note, ma però le dimostrazioni date dall'A. sono più eleganti e più rapide di quelle già note; molte altre proposizioni dell'A. sono del tutte nuove. Il simbolismo algebrico, che si è mostrato molto utile in questa Memoria, è la matrice. In generale si cerca di evitare l'uso delle matrici in Geometria analitica per essere più semplici, ma le dimostrazioni diventano molto più lunghe, meno chiare e tali che fanno perder di vista l'aspetto generale e sistematico, che ha dato luogo a questa Memoria dell'A.

L'A. considera non solo matrici di forme in una sola serie di variabili omogenee per rappresentare in S_3 o in S_4, curve, varietà Jacobiane, ecc. (I. étude), ma matrici di forme in due serie di variabili, i quali enti danno luogo alla teoria analitica dei sistemi algebrici di varietà algebriche. L'applicazione fatta in questo campo dall'A. si riferisce alle congruenze di varietà algebriche dell'iperspazio e specialmente alle curve gobbe dello S_3 (II. étude). La teoria delle matrici si applica pure alla Geometria dello S_3 rigato (III. étude). L'A. si occupa poi di una forma simmetrica binaria doppiamente quadratica, che serve anche a trovare alcune proprietà della superficie di 4.° ordine dello S_3 dotata di cubica gobba doppia (IV. étude). Queste considerazioni si applicano pure ai quadrilateri di Steiner sopra alcuni enti algebrici dello S_3, curve piane e gobbe e superficie (V. étude).

Questi due ultimi studi dell'A. sono in un certo senso d'indole diversa da quelli dei primi tre, i quali si riferiscono alla teoria delle matrici, escluso però quanto si connette (V. étude) alla possibilità di rappresentare mediante un determinante una certa superficie di 6.° ordine dello S_3. Quest'ultima questione si può sotto un certo aspetto pensare come un problema particolare della teoria dei moduli estesa a varietà non complete intersezioni di ipersuperficie. Rispetto alle relazioni tra la teoria dei moduli di forme algebriche ed il simbolismo delle matrici mi sarà lecito osservare (il che non è ancora noto) come il simbolismo delle matrici sia una conseguenza della detta teoria dei moduli. Da questa teoria risulterà poi, come sia necessario considerare leggi di annullamento di matrici più complicate di quelle usate dall'A. in questa Memoria.

Nell'iperspazio si presenta dunque un vasto campo di importanti ricerche, le quali si possono pensare come estensioni di quelle trattate in questa Memoria dall'A. Tali ricerche sono forse difficili, ma per alcune di queste l'indirizzo dato dallo Stuyvaert può giovare a diminuirne le difficoltà.

G. Z. GIAMBELLI

Digitized by Google

ultime classi delle scuole medie, secondo i programmi del 1901. — VI. *Propote di riforma per le ultime classi delle scuole medie.* — VII. *Gli istituti d'insegnamento superiore.*

Per ognuno degli argomenti trattati il Prof. Klein espone con la massima chiarezza e precisione i più essenziali problemi che vi si riferiscono, segnalando le pubblicazioni ove si possono attingere più particolareggiate informazioni; per mostrare che realmente tali questioni non sono affatto speciali alla Germania, segnaliamo almeno alcune di quelle che ci appajono come le più cospicue.

Esordendo il Prof. Klein rileva come le sue lezioni abbiano per intento di togliere quella deplorevole discontinuità nel piano degli studi matematici che egli fa provenire dal « sistema del duplice oblio »: oblio della matematica elementare da parte dei frequentatori dell'Università, oblio delle matematiche superiori da parte del laureato che viene investito della dignità professorale. Sia lecito a chi scrive di ricordare come tale discontinuità fu da lui segnalata quasi dieci anni or sono, e come egli abbia suggerito un mezzo per toglierla (1).

Una questione, su cui il Klein ritorna più volte e con non dissimulata compiacenza, è quella dell'introduzione del calcolo infinitesimale nei programmi delle scuole medie (2); i nostri lettori italiani che non conoscono l'attuale piano di studi della Germania forse troveranno tale richiesta esagerata; ma tosto si ricrederanno tenendo presente che, prima di giungere all'università, il giovane tedesco conosce già l'essenza della geometria analitica e buona parte dell'algebra complementare. Ammessa in principio detta introduzione, tutti converranno col Klein che i concetti fondamentali dell'analisi sublime devono essere insegnati al più presto possibile, per poterne poi fare le applicazioni più vaste e numerose.

Naturalmente tale riforma è connessa all'altra — che, oltre al Klein, annovera tanti fautori — di assegnare al concetto di funzione una parte preponderante in tutti i gradi dell'insegnamento delle scienze esatte, sistema a favore del quale il Klein presenta nuovi e convincenti argomenti (3).

---

(1) *La storia della matematica come anello di congiunzione fra l'insegnamento secondario e l'insegnamento universitario.* Periodico di matematica per l'insegnamento secondario. T. XIV, 1898.

(2) Cfr. questo *Bollettino*, T. IX, 1905, pp. 50-51.

(3) Sopra tale questione — di cui anch'io ebbi ad occuparmi nella mia conferenza *Programmi del passato e programmi per l'avvenire* — esiste in Germania un'estesa letteratura. Fra le pubblicazioni più recenti che vi si riferiscono mi piace ricordare quella di un egregio insegnante già noto ai nostri lettori (cfr. *Bollettino*, T. X, 1907, pp. 56-57), O. Lesser, *(Die Entwickelung des Funktionsbegriffes und die Pflege des funktionalen Denkens in Mathematikunterricht unserer höhere Schulen*; Frankfurt a. M. 1907); ivi è diffusamente esposto in qual modo, ricorrendo alla rappresentazione geometrica, si possa rendere accessibile a tutti il concetto e l'uso di funzione. Tale pubblicazione, diretta ai professori di scuole secondarie, va ad essi vivamente raccomandata.

Digitized by Google

Un'altra questione che il nostro autore tratta da vari punti di vista è l'indirizzo da darsi all'insegnamento delle matematiche nei vari ordini di scuola tenendo conto delle esigenze ognor crescenti della tecnica; nel mentre egli conferma l'idea, già altre volte da lui sostenuta, (cfr. *Bollettino,* T. VIII, 1903, pp. 83), della necessità pei matematici dell'abbandonare lo stato di « splendido isolamento » in cui si mantennero per tutto il corso del secolo passato, non cade nelle esagerazioni di coloro che vogliono abbassare continuamente il livello degli studi teorici, ma giustamente esorta tutti gli insegnanti di materie pure di non perder di vista le applicazioni. Le pagine relative posseggono per noi un sapore di attualità, oggi che il congresso tenuto a Parma dalla Società italiana per il progresso delle Scienze ha posto all'ordine del giorno l'indirizzo da darsi all'istruzione matematica nel primo biennio delle nostre Università.

Non son queste le uniche questioni toccate dal nostro autore; la geometria intuitiva, l'indirizzo della geometria descrittiva nelle scuole inferiori, il posto da assegnarsi all'elemento storico, ecc. ecc. sono tutti punti interessanti che vengon da lui, più o meno a lungo, toccati: ma, se volessi riferire su tutti, non farei che ripetere male quanto egli espose con la eloquenza e profondità che fanno del Klein uno dei maestri giustamente più acclamati; mi arresto, adunque, con la speranza di avere con le linee presenti eccitato il lettore allo studio di un'opera che non saprei dire se più dilettevole od utile, più bella o più buona, più geniale o più erudita.

G. L.

NOTIZIE

I PREMI DELL'ISTITUTO DI FRANCIA. — Nell'adunanza annuale del 2 Dicembre 1907 vennero, fra altri, conferiti i seguenti premi:

Premio Bordin: a F. Enriques e F. Severi. *Premio Francoeur:* a E. Lemoine. *Premio Vaillant:* raddoppiato e diviso in parti diseguali fra J. Hadamard, G. Lauricella, A. Korn e T. Boggio. *Premio Montyon:* a Cuënot. *Premio Poncelet:* a Renard. *Premio Lalande:* a T. Lewis. *Premio Valz:* a Giacomini. *Premio de Pontécoulant:* a Gaillet. *Premio Rinoux:* a C. Loria. *Premio Petit d'Ormoy:* a P. Duhem.

Fra i vari Premi proposti per gli anni venturi ci limitiamo a segnalare i due seguenti come di speciale interesse pei nostri lettori:

Gran Premio delle Scienze Matematiche 1910 (fr. 3000): « Si sanno trovare tutti i sistemi di due funzioni meromorfe nel piano d'una variabile complessa legate da una relazione algebrica. Una questione analoga può proporsi per un sistema di tre funzioni uniformi di due variabili complesse, aventi dappertutto a distanza finita

Digitized by Google

il carattere d'una funzione razionale e legate da una relazione algebrica. L'Accademia domanda, se non una soluzione completa del problema, che si indichino almeno degli esempi che guidino a nuove classi di trascendenti ». *Premio Vaillant 1909* (fr. 4000): « Perfezionare in un punto importante l'applicazione dei principii della dinamica dei fluidi alla teoria dell'elica ».

***

Federico Hultsch nacque a Dresda il 22 Luglio 1833 e fu educato nella « Kreuzschule » di quella città (1846-1851); a Lipsia compiè i suoi studi universitari ed ivi gli venne conferita la dignità dottorale addì 12 Aprile 1855. Ritornò allora nella « Kreuzschule » per assolvervi il regolamentare « Probenjahr » (1855-1856) ed ivi poi ritornò in qualità di insegnante nell'Autunno 1861, per rimanervi, percorrervi tutta la sua carriera d'insegnante e raggiungervi (1868) il grado di direttore; in tale qualità rimase sino al 1889, quando venne collocato a riposo. Della sua grande operosità didattica, come delle sue produzioni filologiche non è qui il caso d'intrattenerci; onde ci limitiamo a rinviare il lettore alla diligentissima biografia pubblicatane di recente da F. Rudio (*Biblioteca matematica*, 3. Ser., T. VIII, 1908) ed all'accuratissimo Indice dei lavori di Hultsch che la chiude. Vogliamo invece ricordare come l'Hultsch in prima linea con la sua celebre edizione di Pappo e poi con quelle di Erone ed Autolico abbia somministrato agli storici della matematica strumenti d'indagine di straordinario valore; e come egli con un grande numero di memorie e di articoli sparsi un po' dappertutto (ci basti ricordare quelli già inseriti o che compariranno nella *Realencyklopädie* di Pauly-Wissowa) siasi collocato in prima linea fra coloro che contribuirono a ricostruire l'antica matematica greca. Benchè carico d'anni e travagliato da malattia l'Hultsch continuò a lavorare sino al giorno (6 Aprile 1906) della sua morte; onde il cordoglio per la sua dipartita è accresciuto dal pensiero che egli non ci abbia detto tutto quello che sapeva intorno all'antichità classica.

***

Temi proposti dalla R. Accademia del Belgio per l'anno 1909: I. Si domanda un contributo importante alla geometria infinitesimale dello spazio euclideo rigato, con un riassunto dei lavori già pubblicati su cui si fondano le nuove ricerche (Premio L. 800). — II. Riassumere i lavori sui sistemi di coniche nello spazio e fare nuove ricerche sopra tali sistemi (Premio L. 800). I lavori dei concorrenti devono essere scritti in francese, in fiammingo od in latino ed essere inviati anonimi prima del 1° Agosto 1909.

Digitized by Google

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E STORIA

DELLE

SCIENZE MATEMATICHE

ANNO XI — Aprile, Maggio e Giugno — 1908

GINO LORIA

Sopra un antico tentativo per dimostrare il teorema fondamentale della teoria delle equazioni algebriche

Nel manipolo di geometri che vissero ed insegnarono a Ginevra nel corso del Secolo XVIII occupa un posto non ispregevole Luigi Bertrand (1731-1812), che si è raccomandato all'attenzione ed alla considerazione dei posteri con due grossi volumi in 4.° di complessive pagine 1322 intitolati: « Développement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques, prise dans toute son étendue » (Genève, 1778).

Illustrati da una vignetta recante per epigrafe i noti versi

> Tu Pastor numerus, extensi tu rationes
> Pandito Venator!

si aprono con curiose considerazioni intese a provare come alla nostra aritmetica possa esser giunto un pastore intelligente, mentre il concetto e le proprietà dello spazio possano esser state stabilite da un cacciatore riflessivo. Citati dal Baltzer (1), per confutare la teoria delle parallele ivi esposta, dal Tropfke (2) e dal Bobynin (3), per ricordare e discutere questo ed altri passi della parte planimetrica di essi e dal compianto Braunmühl (4) per rilevarne i concetti trigonometrici, la parte di essi che concerne la teoria delle equazioni venne, per quanto ci consta, ricordata soltanto e di recente dal Cajori (5), il quale si limitò a riferire la difesa fatta

(1) Planimetria, trad. Cremona, Genova 1875, p. 24.

(2) Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung, T. II, Leipzig 1903, p. 21, 26, 37.

(3) Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, T. IV, Leipzig, 1908, p. 332-336 e 390-394.

(4) Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie, T. II, 1903, p. 120 e 161. Cantor Vorlesungen, T. IV, p. 120.

(5) Cantor Vorlesungen, T. IV, p. 120.

Digitized by Google

dal Bertrand di Daviet de Foncenex contro le critiche mossegli da Lagrange a proposito di una sua nota dimostrazione del teorema fondamentale della teoria delle equazioni algebriche. Ora non è questo l'unico punto dell'opera in discorso che si riferisce a tale proposizione; e benchè il resto poco o nulla aggiunga alle nostro cognizioni, pure, e per essere sfuggito alla critica di Gauss il quale non ne fece menzione nella sua celebre rassegna dei lavori sull'argomento) e perchè documenta in modo irrefragabile la strana confusione d'idee che offuscava in quell'epoca anche gli spiriti non volgari meditanti sopra la teoria dei numeri complessi, ci sembra degno di un esame accurato, quale quello che noi intendiamo di fare qui (1), dopo di avere osservato come le nozioni esposte dal Bertrand intorno alla teoria delle equazioni costituiscano un intermezzo od una digressione, se meglio piace, nella particolareggiata esposizione da lui fatta della Trigonometria piana e sferica

Al pari della generalità dei trattatisti il Bertrand esordisce osservando (T. II, p. 458) che moltiplicando quanti si vogliano fattori lineari del tipo x—a, x—b, x—c, . . . si ottiene un polinomio della forma $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \ldots \pm Mx \mp N$. « De ces observations », egli aggiunge (T. II, p. 460) « presque tous les Mathématiciens se sont permis de conclure que réciproquement une quantité quelconque de la forme $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} \ldots \pm Mx \mp N$, dans laquelle x représenteroit une variable et A, B, C, etc des constantes, serait le produit d'un nombre n de facteurs tels que x—a, x—b, x—c, etc. » Ciò è notorio per n=2; ma è poi vero in generale? « C'est la question ». Per risolverla il nostro autore dimostra che:

1.° Se il polinomio $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} \ldots$ si annulla per x=a esso è divisibile per x - a;

2.° Quando ne è dispari l'equazione $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} \ldots = 0$ ha sempre una radice reale;

3.° Se ne è pari e l'ultimo termine — N dell'equazione è negativo, quell'equazione ha almeno due radici reali.

I ragionamenti da lui adoperati per dimostrare queste proposizioni non differiscono da quelli che ancor oggi si usano, onde non è il caso di arrestarvisi sopra. Poi prosegue:

(T. II, p. 463) « Ce principe, que l'équation $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \ldots \pm Mx \mp N = 0$ a au moins deux racines réelles, étant

(1) A complemento dei nostri antichi studi sulla storia della proposizione fondamentale dell'algebra.

Digitized by Google

joint à ceux qui le précédent; je continue & je dis, que quel que soit le degré d'une équation algébrique $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \ldots \pm Mx \mp N = 0$, cette équation a toujours autant de racines que le nombre n contient d'unités; par où j'entends, qu'il y a toujours n valeurs réelles ou imaginaires composés des coëfficients A, B, C, ... M, N, qui satisfont à l'équation

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \ldots \pm Mx \mp N = 0 \text{ ».}$$

Ora qui si ha un totale cambiamento di scena! Prima si ragionava sopra equazioni a « coefficienti numerici » e si concludeva che, almeno per alcune, esisteva un certo « numero » che sostituito al posto dell'incognita ne annullava il primo membro; ora invece si parla di « espressioni delle radici in funzione dei coefficienti ». E tale sostanziale mutazione nel punto di vista si conserva nel seguente passo:

(T. II, pp. 464-465) « Et d'abord, c'est ce qu'on sait être vrai en fait, par rapport aux équations des premier & second degrés: Et par rapport aux équations du troisème degré, comme elles ont toujous une racine réelle a; il est clair qu'en les divisant par x—a, le quotient sera une quantité de cette forme $x^2 - A'x + B' = 0$, où A', B' représenteront des grandeurs réelles: que par conséquent, une équation de troisième degré a toujours trois racines, vu qu'elle est le produit d'une équation du premier par une équation du second degré.

Passant ensuite aux équations du quatrieme degré $x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0$, j'y distingue deux cas: Celui dans lequel D est une quantité négative, & celui dans lequel D est une quantité affirmative: Dans le premier, l'équation a nécessairement deux racines réelles a, b; de sorte qu'étant divisée par (x—a) (x—b), le quotient est $x^2 - A'x + B' = 0$, qui a deux racines réelles ou imaginaires: Donc toute équation du quatrième degré, dont le dernier terme est négatif, a quatre racines réelles ou imaginaires. c'est-à-dire, qu'il y a quatre valeurs a, b, c, d, composés des coëfficients A, B, C, D de cette équation, qu'y étant substituées à x, en font une équation identique.

Par rapport au cas où D serait affirmatif, les racines de l'équation $x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0$ seroient composées des coëfficients A, B, C, D, de la même manière que les racines de l'équation $x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx - D = 0$ des coëfficients A, B, C, — D. Mais nous venons d'établir l'existance des racines de cette équation-ci; donc les racines de cette équation-là existent: Donc toute équation du quatrième degré a nécessairement quatre

Digitized by Google

racines réelles ou imaginaires, & son premier membre est susceptible de la forme (x—a) (x—b, (x—c) (c—d).

On prouverait de même que toute équation du sixième degré a six racines; parce qu'en ayant nécessairement deux a, b, lorsque son dernier terme est négatif = — kk, elle est divisibile par (x—a) (x—b), & que la division faite, elle se réduit à une équation du quatrième degré, qui a toujours quatre racines c, d, e, f. Et par rapport au cas où le dernier terme d'une équation du sixième degré seroit affirmatif = + kk; si dans les racines qu'avoit cette équation, lorsque son dernier terme étoit = — kk, l'on substituait + kk a — kk, il n'y a aucun doute que ces racines se transformassent en celles de l'équation de sixième degré qui a — kk pour dernier terme. Donc toute équation du sixième degré a six racines.

Et par une manière semblable de raisonner on établiroit successivement, que les équations des 8.ème, 10.ème, 12.ème degrés ont respectivement 8, 10, 12 racines que son exposant 2m contient d'unités. D'où il seroit aisé de conclure que les équations de degré impair 2m — 1 sont dans le même cas; parce que etc. »

Il lettore non tarderà a riconoscere come tutte queste argomentazioni poggino in ultima analisi sopra le due proposizioni seguenti:

1.° Data una equazione della forma $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} \ldots$ esiste una funzione φ (n, A, B, C, . . .) del grado e dei coefficienti la quale sostituita ad x nel primo membro di quell'equazione lo riduce identicamente nullo, funzione che, per certi valori di n e dell'ultimo dei coefficienti A, B, C, . . . assume un valore reale.

2.° Il risultato delle operazioni compendiate nella scrittura φ (n, A, B, . . .), essendo in certi casi reale, sarà in tutti gli altri o reale o della forma $\alpha + \beta$ i.

Ora se si attribuisce al vocabolo « funzione » l'ampio significato oggi in uso nulla vieta di scrivere $x = \varphi$ (n, A, B, C, . . .) invece di $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} \ldots = 0$, purchè al simbolo φ non si attribuisca tacitamente alcuna proprietà oltre a quelle esplicitamente indicate nell'enunciato. Ma, stante la oscurità che avvolge le prerogative di tale funzione, nulla autorizza a ritenere evidente che qualunque siano i valori di A, B, C, ... n, la quantità φ (n, A, B, C, ...) sia sempre un numero reale o complesso; per convincerne basta riflettere che per es. dal fatto che l'equazione $x^6 - 3x^5 + 7x^4 - 2x^3 + 9x - 12 = 0$ ha per radice x = 1, nulla può dedursi riguardo alla natura dell'equazione $x^6 - 3x^5 + 7x^4 - 2x^3 + 9x + 12 = 0$.

Tali dubbi intorno alla solidità dell'esposto ragionamento si affacciarono alla mente del Bertrand? A prima giunta si direbbe

Digitized by Google

di no, perchè egli, della decomponibilità in fattori di qualsia polinomio razionale, fa proprio punto d'appoggio per stabilire le espressioni delle funzioni simmetriche semplici delle radici di qualsiasi equazione algebrica in funzione dei coefficieati. Se non che, esaurita tale ricerca, egli stupisce i propri lettori col passo seguente:

(T. II, p. 488): « À toutes ces propositions, tendentes à faire pénétrer de plus en plus dans la nature des équations algébriques, joignons une rélative aux racines imaginaires des équations, qu'elle réduit toutes à la forme $a + b\sqrt{-1}$, en tant que les lettres a, b, représentent des quantités réelles. Ensorte que l'imaginaire provenant de la résolution des équations algébriques a toujours & costamment sa source dans l'impossibilité qui se trouve à ce que la racine de — 1 soit un nombre réel ».

E qui si trova il brano di cui si è occupato il Cajori.

Ma, dunque, che cosa aveva creduto di dimostrare il nostro autore col ragionamento da noi riferito e criticato? E se egli non si faceva illusione intorno alla solidità di quell' argomentazione, perchè non rafforzarla con nuove considerazioni prima di applicarne il risultato alla dimostrazione delle formole di Girard-Newton? . .

Altri tenti la risposta. Quanto a noi osserviamo soltanto che dalla debolezza dei ragionamenti analizzati noi tragghiamo la conferma sul giudizio intorno al Bertrand a cui si è condotti dallo studio di tutto della sua opera: abilissimo in ogni sorta di calcoli, egli si manifesta sempre degno discepolo di Eulero; ma in quelle ricerche di ordine ge erale, che si direbbero appartenere alla « metafisica delle scienze esatte », le ali del suo ingegno non lo sorreggono, onde egli precipita; al capitombolo da lui fatto trattando della teoria delle parallele fa riscontro lo sdrucciolone che amareggiò la sua corsa nella teoria delle equazioni algebriche!

Geometria projettiva

T. Reye — *Die Geometrie der Lage. Vorträge.* Zweite Abteilung. IV, umgearbeitete und vermehrte Auflage. Mit 33 Figuren im Text. Stuttgart, A. Kröner 1907, 8.°, p. VIII+335 [Prezzo del vol. leg. Mk. 12].

Anche questa II Parte della classica opera del Reye (riguardo alla I v. questo *Bollettino,* II, 1899, p. 121) nella sua IV ed. che oggi annunziamo ha subite rilevanti modificazioni e notevoli miglioramenti di sostanza e di forma. Riguardo alla forma meritano di venire segnalate le molte e felici innovazioni nella nomenclatura,

Digitized by Google

in parte suggerite dal Prof. Jolles (1), e le esatte notizie storiche, che speriamo vengano ancora aumentate in una ventura edizione.

Riguardo alla sostanza noteremo che, quantunque siano state riserbate per la ventura III Parte le nozioni sul calcolo con simboli di projettività, le lezioni sono salite da 26 a 31, e, benchè siano stati banditi gli esercizi di natura cinematica, pure essi aumentarono da 196 a 238; prescindendo da tali soppressioni, gli argomenti trattati nella nuova edizione sono gli stessi di quelli svolti nella precedente: l'ordinamento però venne di molto cambiato; inoltre si può dire che ogni pagina abbia subìto qualche ritocco, ogni lezione siasi arricchita di qualche ulteriore sviluppo. Anche in ciò l'illustre A. si giovò della collaborazione del Prof. Jolles, il quale è uno dei pochissimi che oggi serbino fede ai metodi di cui Staudt è il Dio creatore ed il Reye il Profeta.

La geometria pura attraversa attualmente un periodo di anemia o sterilità; possa l'opera del Reye, nella nuova forma sotto cui presentasi al pubblico matematico, rivelandone le recondite bellezze, mostrare che essa non merita l'abbandono in cui è lasciata! È questo il miglior premio che possiamo augurare alle nobili fatiche che da un quarantennio occupano il celebre professore dell'Università di Strassburgo.

K. Doehlemann — *Geometrische Transformationem.* Erster Teil: *Die projektiven Transformationen nebst ihren Anwendungen.* Mit 99 Figuren und 6 Abbildungen. p. VII+320, 1902, [Prezzo del vol. leg. Mk. 10]. Zweiter Teil: *Die quadratischen und höheren, birationalen Punkttransformationem.* Mit 84 Figuren. p. VIII+328. Leipzig, Goeschen, 1908 [Prezzo del vol. leg. Mk. 10].

R. Sturm — *Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften* I Band: *Die Verwandschaften zwischen Gebilden erster Stufe.* 8.° gr. p. XII+415. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1908 [Prezzo del vol. leg. Mk. 16].

Ciò che distingue la geometria dei tempi che seguirono a Poncelet dalla geometria greca è il carattere di generalità e di unità che vi si nota e che vivamente contrasta coll'apparenza artificiosa sotto cui presentansi le ricerche scritte nello stile degli antichi. E se si cerca a quale potente influs o provenga tale trasfigurazione si finisce per concludere esser dessa dovuta al concetto di *trasformazione,* così affine al concetto di *funzione* a cui deve la propria esistenza l'analisi moderna. Tale e tanto fu il potere di quella no-

(1) Il lettore che desidera apprenderle facilmente ricorra all'indice per materie con cui si chiude il volume in discorso.

Digitized by Google

zione che si può asserire che un'esposizione completa dei risultati che ebbe equivarrebbe ad un quadro della nostra attuale ricchezza geometrica Non deve quindi far meraviglia se quasi contemporaneamente sia sorta in due diversi scienziati l'idea di esporre i vari aspetti sotto cui si è finora considerata la nozione di « trasformazione geometrica » ed i vari frutti che così vennero a maturità.

Quella di più antica data è anche la più elementare ed occupa i volumi XXVII e XXVIII della nota « Sammlung Schubert ».

Il primo di essi, come lo dice il titolo, verte esclusivamente sopra le trasformazioni projettive: che la trattazione sia prevalentemente analitica risulta dal fatto che si apre con una Sezione dedicata alle « coordinate projettive ». Le altre tre trattano poi della projettività rispettiva nel campo binario, nel ternario e nel quaternario. Ci esoneriamo dal descriverne partitamente il contenuto, certi che i lettori se lo figureranno senza stento, limitandoci ad osservare come l'ultimo argomento svolto sia la trasformazione projettiva di una quadrica in sè stessa. Aggiungiamo che l'A. ha opportunamente indicato alcune applicazioni della teoria esposta (p. es alla geometria descrittiva) e che si è arrestato a far conoscere gli strumenti pantografi, prospettografi, apparati modellatorii col mezzo dei quali si possono costruire le figure che corrispondono ad una data in speciali trasformazioni collineari utili in pratica.

Il secondo volume dell'opera del Prof. Doehlemann si divide in due grandi sezioni, l'una dedicata alle trasformazioni piane, l'altra alle trasformazioni dello spazio. Quella si apre con una circostanziata esposizione delle trasformazioni quadratiche generali, a cui seguono due capitoli relativi uno alle trasformazioni quadratiche metricamente specializzate, l'altra alla « Kreisverwandtschaft », quest'ultimo chiudentesi con un cenno intorno alle trasformazioni (conformi) determinate da una funzione di variabile complessa. Questi tre capitali costituiscouo un'utile propedeutica alla teoria generale delle trasformazioni cremoniane, ampiamente esposta nel IV capitolo dell'opera. — Parallelamente a questa procede la trattazione della teoria analoga nello spazio. Essa, infatti, comincia con l'esposizione delle proprietà di una trasformazione quadratica dello spazio che guida alla nota rappresentazione di una quadrica su di un piano; segue un Capitolo sopra quelle trasformazioni quadratiche nelle quali una parte preponderante è sostenuta dal cerchio immaginario all'infinito, trasformazioni che mutano sfere in sfere e fra cui spicca la trasformazione per raggi vettori reciproci, alle applicazioni della quale (specialmente alle superficie ciclidi) è dedicato un intero Capitolo. L'ultimo Capitolo tratta della nota trasformazione cubica dello spazio generata da tre spazii correlativi e più

Digitized by Google

in generale alla teoria generale delle trasformazioni birazionali dello spazio ordinario.

Lo spazio ristretto concesso all'A. ed il vincolo di non supporre nel lettore una cultura matematica ampia e profonda lo costrinsero a tacere molte cose che pur avrebbero meritato qualche non fugace menzione; ad ovviare almeno in parte a tale inconveniente egli ha provveduto indicando per ogni Capitolo i più cospicui lavori da cui il lettore potrà attingere ulteriori notizie sopra gli argomenti trattati: così egli ha assicurata all'opera sua la qualità di ottima guida per un primo studio intorno al suo tèma.

Ben più vasto è il piano e più elevati sono gli intenti dell'opera del valoroso professore dell'Università di Breslavia, della quale egli ha pubblicato il I° volume assieme all'indice particolareggiato dei tre che lo seguiranno a breve scadenza; opera che, quando sarà completa, costituirà un « vade-mecum » indispensabile per chiunque intenda dedicarsi alla moderna geometria. La parte che oggi ne annunziamo si riferisce alla teoria ed alle applicazioni delle corrispondenze tra forme di I^a specie e naturalmente dividesi in due parti, una dedicata alle corrispondenze univoche, l'altra consacrata alle corrispondenze (m, n). In quella si trova una esauriente esposizione della projettività nel campo binario, con applicazione a le coniche, i coni quadrici e le rigate di 2° grado: ed insistiamo sull'epiteto « esauriente », perchè nulla di essenziale relativo all'argomento trattato venne trascurato dall'A. Il metodo di esposizione è sintetico, nel senso che a questa parola attribuirono Steiner, Chasles e Cremona, chè largo uso è fatto dei doppi rapporti e delle relazioni metriche. Meno elementari e più interessanti sono le considerazioni esposte nella seconda Parte; la loro varietà è tale che per darne un concetto approssimativo ai nostri lettori è giuocoforza che riferiamo i titoli dei paragrafi che la formano: 24. Corrispondenze multiple; principio di corrispondenza; coincidenze multiple. 25. Teoremi sopra le intersezioni di curve; formole di Plücker; conservazione del genere. 26. Enti generati da corrispondenze multiple. 27. Punti di diramazione e punti doppi nelle corrispondenze multiple. 28. Teoremi sopra le forme di prima specie in corrispondenza univoca. 29. Involuzioni projettive. 30. Involuzioni generate da figure in corrispondenza multipla. 31. Le coniche come sedi di corrispondenze multiple. 32. Corrispondenza projettiva fra tre forme di I^a specie; la cubica gobba. 33. Corrispondenza trilineare fra tre forme di I^a specie. 34. Involuzioni di specie superiore. 35. Il problema della projettività piana. 36. Il complesso tetredrale ed il problema della projettività solida. 37. Teoremi sopra i fasci projettivi nello spazio

Riguardo ai procedimenti usati dall'A. per condurre a termine le sue ricerche ben poco possiamo dire che riesca nuovo a chi seguì

Digitized by Google

l'autore nella sua lunga carriera scientifica; chè lo stile di questa sua opera è sostanzialmente il medesimo da lui usato nella memoria che gli valse nel 1867 il Premio Steiner. Due sole cose vogliamo notare; e cioè l'uso frequente dei concetti e dei metodi della Geometria numerativa, secondo le idee dello Schubert, e l'aspirazione sempre vivace nell'A. verso argomentazioni pienamente rigorose, nell'usare le quali sembra che egli, oltre al seguire la propria tendenza naturale, voglia protestare contra una certa rilassatezza da lui notata e deplorata. Possa la sua voce venire ascoltata da tutti e possa anche l'opera da lui intrapresa avere il magico potere di riporre in onore la ricerca geometrica, i cui cultori costituiscono un esiguo manipolo tendente sempre ad assottigliarsi!

G. L.

Geometria descrittiva

EUGENIO BERTINI. — *Lezioni di Geometria descrittiva* (ad uso degli studenti della R.ª Università di Pisa). — Firenze. — Prem. stab. tipo-litografico C. A. Materassi. Via Pietro Thouar lett: A. — 1907.

1. — Nella modesta apparenza di « lezioni autografate » e a breve distanza dalla pubblicazione della poderosa opera iperspaziale, si presenta al pubblico questo nuovo libro del prof. Bertini quale esposizione sistematica e organica di quelle nozioni di Geometria descrittiva che sono indispensabili agli allievi ingegneri e quale utile propedeutica al corso successivo di Geometria superiore per gli allievi-insegnanti. Il piano generale del libro mira a questo duplice scopo, ed è conseguente al modo col quale si svolgono le lezioni universitarie, del primo biennio, nella illustre facoltà matematica Pisana. Le prime due parti del libro riguardano l'insegnamento comune alle due categorie di allievi suddetti, e in queste due parti si contengono le nozioni di Geometria descrittiva propriamente detta, cosicchè l'uso dei metodi di rappresentazione è ivi pressochè continuo: la terza parte riguarda soltanto gli studenti di matematiche pure i quali a Pisa, più che altrove, (per ragioni ben note) compongono una scolaresca numerosa ed eletta. È appunto in riguardo a questo, che coloro che considerano il libro in modo non superficiale, troveranno non esagerato, nè inopportuno lo svolgimento teorico della 3.ª parte, la quale è sciolta da ogni vincolo con la Geometria descrittiva e costituisce un vero e proprio corso di introduzione alla Geometria superiore. Così, nell'anno successivo, possono gli allievi laureandi essere portati più facilmente a contatto con alcune delle ultime parti dell'edifizio geometrico e sentire più

Digitized by Google

fortemente il desiderio di partecipare all'opera degli artefici dell'edifizio (il che costituisce l'ideale di ogni insegnamento teorico).

2. — Mi accingo a una breve analisi del libro che dichiaro subito ottimo, sotto ogni rapporto.

La prima parte è destinata alla esposizione dei metodi di rappresentazione e siccome in essa i problemi e le questioni trattate sono necessariamente, e per la maggior parte, le usuali comuni a tutti i libri di descrittiva, così mi limiterò ad accennare a quanto vi è, nel libro attuale, di meno solito nella risoluzione di questioni e di problemi soliti. Comincio dal primo capitolo che è destinato alla proiezione centrale. L'antipolarità rispetto al cerchio di distanza viene esplicitamente presentata quale sezione, col quadro, della polarità ortogonale nella stella che ha per centro quello di proiezione. Ne consegue la decomposizione nella polarità rispetto al cerchio di distanza e nella simmetria rispetto al punto principale. A voler essere meticolosi, si potrebbe osservare che di qui era facile e forse utile il passo per riguardare, tale antipolarità, addirittura come polarità rispetto alla proiezione del cerchio immaginario all'infinito fatta dal centro di proiezione sul quadro. Le considerazioni inerenti alla antipolarità suddetta continuano per varî numeri con osservazioni nuove qual'è quella che ogni triangolo autoconiugato è acuntangolo e che viceversa ogni triangolo acutangolo può considerarsi come autoconiugato in una determinata antipolarità. È notevole (per le applicazioni in assonometria) il problema di tagliare un triedro trirettangolo in modo che la sezione riesca uguale a un dato triangolo acuntangolo. È anche notevole il problema di costruire la immagine di un cerchio passante per tre punti dati, per la sua riduzione a un elegante e ben noto problema di geometria proiettiva: quello di costruire una conica passante per cinque punti dati di cui tre reali e due immaginarî coniugati.

3. — Nel capitolo 2.°, esclusivamente dedicato alla esposizione del metodo di Monge, è da segnalare la importanza assegnata alla dipendenza affine che collega fra di loro le due proiezioni di una medesima figura piana, onde la costruzione dell'asse di tale affinità appare come il fondamento di molti problemi riguardanti le figure piane. La nota condizione di ortogonalità fra gli elementi descrittivi di una retta e un piano perpendicolari è ottenuta mediante due semplici proposizioni geometriche intorno alla proiezione ortogonale di un angolo su di un piano. Nella dipendenza omologica che collega la prima proiezione di una figura piana col suo ribaltamento sul piano orizzontale, si tiene conto utilmente dell'invariante assoluto di tale omologia sotto la forma del coseno dell'angolo che il piano della figura fa col piano orizzontale. Sulla rappresentazione delle coniche sono notevoli le osservazioni che conducono alle condizioni perchè una delle proiezioni ed anche entrambe sieno cerchi.

Digitized by Google

4. — Il capitolo 3.° è il capitolo assonometrico che non manca oramai in qualsiasi libro di descrittiva. È da segnalare il teorema che afferma come tre semirette uscenti da un punto e formanti fra loro angoli ottusi possano sempre pensarsi come proiezioni ortogonali di un triedro trirettangolo. Le costruzioni di questo capitolo non si allontanano gran che dalle solite. Più originale è quanto riguarda le tre costanti assonometriche: due opportuni lemmi di geometria elementare servono in modo assai semplice a stabilire le conosciute proprietà che collegano i rapporti di raccorciamento con le proiezioni degli assi e con le scale assonometriche. Il cenno inerente all'assonometria obliqua poteva essere tralasciato senza grande nocumento: in ogni modo, volendone trattare, mi sarebbe parso opportuno accompagnare l'enunciato del teorema di Pohlke alla relativa dimostrazione.

5. — Nel capitolo 4.° sono opportunamente riunite varie applicazioni particolarmente interessanti per gli allievi ingegneri. È questo un capitolo che potrebbe degnamente figurare in un corso di applicazioni di Geometria descrittiva. — Si comincia con la risoluzione dell'angolo triedro riducendola ai tre noti problemi. Nella risoluzione del primo (date le tre facce) è da notare il caso in cui non importi conoscere tutt'e tre i diedri, ma soltanto uno determinato di essi: ne consegue la riduzione di un dato angolo all'orizzonte. Viene poi un paragrafo destinato completamente ai poliedri e qui mi piace segnalare la precisa esposizione di tutto quanto si riferisce al disegno delle cosidette parti visibili o no: quasi sempre queste nozioni vengono ommesse, o dichiarate in modo impreciso e, all'atto pratico, lasciate al criterio più, o meno, variabile del disegnatore. Si viene poi a parlare dei poliedri regolari convessi stabilendo la esistenza dei cinque tipi noti con considerazioni elementari semplici e precise. La rappresentazione di questi cinque tipi è fatta col metodo di Monge assumendo i piani coordinati in posizioni particolari. Sarebbe stato desiderabile forse far vedere come da queste proiezioni particolari si passi a proiezioni qualsiasi. Basta (a tale scopo) fare due successive rotazioni del solido: l'una attorno a un asse perpendicolare al piano orizzontale e, dopo, l'altra attorno a un altro asse perpendicolare al piano verticale e le due proiezioni del poliedro acquistano forma generica. Sarebbe stato utile dare anche la dimostrazione di alcuni fatti semplicemente affermati (ad es. quelli inerenti alle varie altezze dei vertici del dodecaedro sul piano di una faccia qualunque ecc.) E, indipendentemente da qualsiasi rappresentazione, sarebbe stato eccessivo descrivere le rotazioni che sovrappongono a se stessi questi poliedri? e la reciprocità rispetto a una sfera (concentrica al poliedro) la quale riduce a tre tipi distinti i gruppi di queste rotazioni?

Seguono poi le sezioni piane dei poliedri, le loro intersezioni

Digitized by Google

e i principî della teoria delle ombre in riguardo a questi poliedri svolti in modo preciso e rigoroso come spesso non accade in argomenti di questa specie (quasi sempre trascurati, o implicitamente ritenuti, e a torto, poco degni di considerazione). Il capitolo si chiude con un intero paragrafo dedicato alla prospettiva e illustrato da esempi istruttivi ottimi come preparazione al corso delle applicazioni di descrittiva, nel quale corso la prospettiva tiene così notevole posto.

6. — La parte seconda dell'opera è divisa in due capitoli l'uno riguardante le curve e le sviluppabili e l'altro le superficie in generale. Vi è esposto delle une e delle altre quanto è indispensabile conoscere in riguardo alle applicazioni dell'ingegneria. Nel capitolo 5.° (il 1.° di questa seconda parte) si comincia dalle nozioni fondamentali inerenti alle curve piane e ai coni in modo tutt'affatto indipendente da qualsiasi metodo di rappresentazione. Così si definiscono le curve algebriche, il numero dei punti che le determinano, le tre specie di punti doppi e più in generale la nozione di punto multiplo limitandosi al caso semplice in cui tutti i rami sono distinti. Parallelamente vengono esposti i concetti duali, nel piano, inerenti a curve inviluppo, al numero delle tangenti che le determinano, alle tangenti singolari ecc. ecc. Mediante proiezione si passa alla geometria della stella e quindi a quella dei coni riguardati come luogo di rette, o come inviluppo di piani.

Il capitolo prosegue con alcune considerazioni metriche d'indole infinitesimale, così si espongono le nozioni inerenti alla curvatura di una linea piana, al centro di curvatura, cerchio osculatore, evolute, evolventi ecc. Sono bene appropriati gli esempi di curve piane algebriche e trascendenti dati alla fine di questo paragrafo: essi ricapitolano opportunamente tutte le considerazioni generiche fatte avanti. Il paragrafo che segue, incomincia con la risoluzione grafica di alcuni problemi inerenti alle tangenti, alle normali, al cerchio osculatore delle curve piane servendosi delle cosidette curve d'errore, dopo di che, i metodi di rappresentazione riprendono il loro impero e si applicano principalmente a problemi inerenti ai coni, ai loro piani tangenti, alle sezioni piane, sviluppi ecc. L. A. estende poi alle curve gobbe e alle sviluppabili i concetti esposti avanti per le curve piane e per i coni e ne fa particolare applicazione alla cubica gobba (mediante la rappresentazione parametrica). L'intuizione geometrica ha sempre larga parte anche nelle considerazioni infinitesimali: ed è bene. Se in queste ultime considerazioni il rigore può qualche volta sembrare adombrato, bisogna pensare che gli alunni, per i quali il libro è scritto, seguono, parallelamente al corso di descrittiva, quello di calcolo infinitesimale ove appunto essi trovano la piena conferma, per via analitica, indiscutibilmente sicura,

Digitized by Google

di quei concetti e di quei teoremi incontrati nella descrittiva i quali dipendono più o meno palesemente dalla analisi infinitesimale e niun elemento educativo nel campo matematico riesce più efficace di quello offerto dalla intuizione geometrica e dalla indagine analitica cospiranti a un medesimo fine.

Il paragrafo che segue è destinato all'elica e all'elicoide sviluppabile e risolve le questioni fondamentali inerenti a tale curva: è da notarsi la proiezione parallela obliqua della curva in una cicloide e la rappresentazione assonometrica della curva medesima. — Dopo, l'A., ritorna ancora sulla cubica gobba associandone la teoria a quella del fascio di quadriche. Sono notevoli varî problemi risolti intorno ad essa più di quello che ordinariamente si faccia e particolarmente ingegnosa è la costruzione del punto doppio della immagine della curva.

La teoria del fascio di quadriche porge il destro all'A. di sviluppare le cose principali inerenti alla quartica base del fascio. Egli mette così in rilievo la interessante configurazione che nasce dal considerare il tetraedro individuato dai vertici dei 4 coni quadrici passanti per la curva. Approfittando di due di questi coni l'A. passa alla rappresentazione effettiva di questa curva mediante le sue proiezioni e, servendosi del metodo dei piani secanti, distingue i due casi di mutua penetrazione dei due coni e di strappamento o saldamento.

7. — Il capitolo 6.° (secondo della seconda parte) è dedicato alle nozioni fondamentali più comuni intorno alle superficie in generale ed è quindi indipendente da qualsiasi sistema di rappresentazione. L'A. si ferma poi a parlare più particolarmente delle superficie algebriche considerandole sotto le due forme duali di luogo di punti e di inviluppo di piani. Si presentano quindi le nozioni di ordine, di classe, di piano tangente, di cono circoscritto da un punto, di punto multiplo ecc. Nel campo metrico sono enunciate le prime definizioni e proprietà inerenti alle assintotiche, alle geodetiche, alle linee di curvatura ecc.

Le nozioni svolte vengono applicate nei due paragrafi seguenti a due notevoli classi di superficie e cioè alle rigate gobbe e alle superficie di rotazione. Circa alle prime si espongono, fra le cose principali, l'uguaglianza fra l'ordine e la classe, la proiettività fra il fascio di piani tangenti passanti per una generatrice e la punteggiata dei punti di contatto onde ne segue il teorema di Hachette sopra due rigate gobbe aventi una generatrice comune. Intorno alla generazione delle rigate si espone quella che appare la più naturale, mediante una retta mobile appoggiata a tre direttrici fisse di cui si conoscono gli ordini e il numero dei punti che a due, a due hanno in comune. Si presenta infine la linea di gola della superficie come

Digitized by Google

luogo dei punti centrali di tutte le generatrici. Queste considerazioni generali sulle rigate gobbe vengono poi illustrate da esempi e da casi particolari sommamente interessanti per la scienza delle costruzioni: tali sono la superficie delle volte a sbieco, del cilindroide, del cono-cuneo, della superficie della volta d'ingresso in una torre rotonda e degli elicoidi in generale fra cui particolarmente quello a cono e a piano direttore. La speciale importanza di quest'ultimo suggerisce all'A. la risoluzione di svariati problemi col metodo di Monge. Per l'elicoide a piano direttore si enuncia la proprietà che lo caratterizza fra tutte le rigate gobbe, quella cioè d'essere una superficie d'area minima (è sottinteso che si tace la dimostrazione impossibile a farsi con i metodi elementari di cui qui si dispone).

Intorno alle superficie di rotazione, premesse le nozioni principali inerenti alle linee notevoli della superficie (paralleli e meridiani) si risolvono col metodo di Monge i soliti problemi fondamentali fra i quali però mi piace segnalare la intersezione di due superficie di questa specie i di cui assi s'incontrano e la intersezione di una superficie di rotazione con un cono. Varie costruzioni inerenti al toro sono proposti e sviluppati. Forse era bene insistervi anche di più, mostrando tutte le specie di sezioni piane della superficie (per mettere in rilievo particolarmente il primo esempio di piano tangente secante la superficie in una curva non spezzata e dotata di un punto doppio nel punto di contatto).

I due paragrafi seguenti destinati alla rappresentazione delle quadriche sono due dei migliori. Dapprima il centro di proiezione è supposto fuori della superficie e ne segue un teorema interessante che dà la condizione necessaria e sufficiente affinchè una conica del quadro sia immagine di una conica situata sulla superficie, in base al quale teorema sono risolute varie questioni importanti generalmente dimenticate, o scarsamente sviluppate nei trattati di descrittiva. La difficoltà di risoluzione varia a seconda che la quadrica è a punti ellittici, od iperbolici e l'A. fa ben notare questa diversità. Nell'ultimo paragrafo il centro di proiezione si suppone sulla quadrica, onde ne segue la nota rappresentazione biunivoca della superficie su di un piano e si porge così agli allievi l'esempio più semplice di superficie razionale. Conseguentemente si fa l'applicazione di questo caso particolare alla proiezione stereografica della sfera dimostrando come discendano immediatamente le due proprietà fondamentali della proiezione stereografica suddetta (il mantenersi degli angoli e la proiezione di un cerchio della sfera in un cerchio del piano). — Ritornando poi al caso generico di una quadrica a punti iperbolici, il paragrafo termina con un breve saggio di geometria delle curve situate sulla superficie desumendone le proprietà principali dalla rappresentazione piana. — E con questo hanno ter-

Digitized by Google

mine le lezioni costituenti la parte del corso che è comune agli allievi ingegneri e agli studenti di matematiche pure, ai quali ultimi è particolarmente dedicata la parte terza del libro.

8. — Essa è divisa in tre capitoli: il primo riguarda le curve e le superficie algebriche in generale, il secondo considera particolarmente le superficie cubiche e il terzo contiene un rapido, ma succoso cenno sulla geometria della retta. I metodi di rappresentazione vengono naturalmente abbandonati. Nel primo dei capitoli suddetti (il 7.° dell'opera) si riprende la definizione di curve piane già data per l'innanzi, e adottando coordinate omogenee, si comincia dal considerare i punti d'incontro di una retta con la curva secondo il metodo di Joachmistal. Ne seguono immediatamente le condizioni per l'esistenza di un punto multiplo. Queste condizioni vengono opportunamente trasformate servendosi della teoria delle curve polari presentate a questo punto del corso. Queste ultime nozioni hanno tal carattere da potersi estendere immediatamente alle superficie algebriche. L'A. non manca di approfittarne dimostrando che basta appena la introduzione di una coordinata di più per passare dalle nozioni date selle curve algebriche a quelle inerenti alle superficie.

Ritornando alle curve piane, vengono esposte in modo facile ed elementare le formule di Plücker e la importante nozione di genere nei casi più semplici. Se ne fa l'applicazione a un esempio notevole: a quello delle curve ellittiche di 3.° ordine, mettendo specialmente in evidenza le proprietà inerenti alla configurazione dei flessi. La definizione di genere, già stabilita, conduce l'A. a parlare delle curve di genere zero e particolarmente della cubica razionale distinguendo i due casi del nodo e della cuspide. L'A. accenna poi l'estensione alle superficie, ma aggiunge anche come la cosa si presenti ora ben più difficile di quel che lo sia stata per l'innanzi: il campo è così vasto e aspro da esser costretti a limitare tutto a qualche cenno brevissimo sulla intersezione di tre superficie (il quale cenno poteva, in verità, essere ommesso senza che il libro perdesse di pregio). Il capitolo si chiude esponendo le formule di Cayley inerenti alle curve gobbe algebriche e applicandole poi a quelle di 3.° e 4.° ordine (ciò che dà occasione all'A. di distinguere le due specie di quartiche gobbe).

9. — Il capitolo seguente (l'8.°) è interamente dedicato alle superficie di 3.° ordine considerando prima il caso più semplice delle rigate eppoi quello generico. — Per le rigate cubiche sono esposti i varî metodi più importanti di generazione fino a stabilire la forma canonica della equazione rappresentante la superficie. Non è tralasciato il caso limite di Cayley al quale sono rivolte brevi ma caratteristiche osservazioni.

Digitized by Google

Passando poi alle superficie cubiche generiche è da notarsi il modo semplice col quale viene stabilita la esistenza delle 27 rette e conseguentemente quella dei 45 piani tritangenti. Ne segue una delle più ovvie rappresentazioni piane della superficie mediante la retta che partendo da un punto generico della superficie stessa si appoggia a due sghembe delle 27 rette suddette. La rappresentazione piana porge il migliore strumento di studio delle configurazioni più importanti formate con le rette in parola (prima, fra tutte, le bissestuple). Vengono poi le generazioni più comuni della superficie e un rapido cenno sul caso particolare in cui essa possiede dei punti doppi.

10. — Il capitolo ultimo (il 9.°) è dedicato completamente alla geometria della retta. Le coordinate relative sono introdotte nella forma ormai classica di Plücker mettendo bene in evidenza, in modo più rigoroso del solito, la perfezione veramente ideale del sistema di coordinate assunto. L'A. coglie di qui una facile occasione per stabilire la esistenza delle due specie ben distinte di coppie di rette immaginarie coniugate (quelle che dànno origine a un punto e a un piano reali e quelle sghembe). Segue uno svolgimento sufficientemente ampio della teoria dei complessi e congruenze lineari e conseguentemente del sistema nullo il quale prende così il suo posto più naturale nel libro. Infine, come esempio particolare di complesso quadratico, è data per sommi capi la teoria del complesso tetraedale esponendone i teoremi e le generazioni principali.

11. — Questo è il ricco contenuto del libro. Trattandosi di un materiale così abbondante e così vario era difficile la distribuzione, facile il pericolo che l'opera intiera riuscisse disarmonica. Invece la distribuzione è ottima e uno dei maggiori pregi mi sembra proprio quello di aver messo tutto al posto migliore e in giusta luce. L'impresa non era facile anche in considerazione del doppio scopo a cui il libro doveva servire. I metodi di rappresentazione sono ampiamente svolti in quanto riguarda la proiezione centrale, il metodo di Monge e l'assonometria: sarebbe desiderabile un maggior sviluppo per il metodo delle proiezioni quotate presentato con troppo rapido cenno. Una lode particolare va tributata ai moltissimi esercizi sparsi sistematicamente qua e là nell'opera e nei punti più appropriati: per la maggior parte essi sono semplicemente proposti: ma dei più difficili e geniali è intrapresa e anche completata la soluzione. Le figure sono disegnate con sufficiente chiarezza. Non si può dire altrettanto della stampa autografica del testo. Io chiudo queste linee formulando l'augurio che presto l'A. provveda a dare al libro quella migliore veste tipografica che possa renderlo più accetto anche nella sua forma esterna e ne favorisca la meritata diffusione.

EDGARDO CIANI.

Digitized by Google

Teoria dei numeri

PAUL BACHMANN. — *Grundlehren der neuren Zahlentheorie.* Leipzig, G. J. Göschen, 1907 [Prezzo Mk. 6,50].

Ora son già sette lustri dacchè il Prof. Bachmann dava alla luce le sue Lezioni accademiche dal titolo « *Die Lehre von der Kreistheilung und ihre Beziehungen zur Zahlentheorie* ».

Là eran trattate, con sapiente ordine e bella forma, le mirabili ricerche di Gauss sulla divisione della circonferenza in parti eguali, con le applicazioni alla teoria dei residui quadratici, alla decomposizione dei numeri in somme di quadrati e con gli sviluppi più importanti che della teoria avevan dato principalmente Jacobi e Kronecker. Ivi trovavano anche posto, assieme alle ricerche di Gauss sui residui biquadratici e di Jacobi, Eisenstein e Lebesgue sui residui cubici, i primi studi, dovuti a Kummer, sui numeri interi complessi formati dalle radici dell'unità.

Quest'opera è la prima, per ragion di tempo, di una serie di opere che l'illustre A. è venuto pubblicando sulle varie parti della Teoria dei numeri. L'ultima *(Allgemeine Arithmetik der Zahlenkörper,* Leipzig, B. G. Teubner, 1905), venuta alla distanza di un trentennio dalla *Kreistheilungslehre,* mostra quanto progresso nel giro di pochi anni abbia fatto la teoria dei numeri nei corpi algebrici.

La mole però dell'opera intera del Bachmann costituisce un inconveniente un po' grave per coloro che vorrebbero essere iniziati rapidamente alle varie questioni di Aritmetica superiore, onde ben a proposito vien fuori, a questo scopo, un nuovo lavoro del medesimo Autore: *Grundlehren der neueren Zahlentheorie* — bel volume della elegante « collezione *Schubert* » di libri matematici, edita dal Göschen di Lipsia.

L'Autore, gentilmente aderendo alle insistenze cortesi dell'editore, ha così soddisfatto al bisogno di un'opera che, svolgendo con forma sobria e moderna le parti fondamentali della Teoria dei numeri, ne desse conveniente notizia a coloro che si dedicano ad altri rami della speculazione matematica e preparazione sufficiente a quegli studiosi che vogliono coltivare in opere più vaste o nelle memorie originali quest'interessante ramo dell'Analisi moderna.

Ed invero Egli è riuscito nel suo intento, riunendo in un volume di 270 pagine la teoria delle congruenze, delle forme quadratiche e i fondamenti della teoria dei numeri nel corpo quadratico.

La teoria delle congruenze vi è trattata nel modo classico, del teorema di reciprocità dei residui quadratici è data una delle dimostrazioni più semplici: la terza di Lange, fondata sul lemma di Gauss, e la teoria dei residui quadratici vien chiusa colla regola di Eisenstein per il calcolo del simbolo di Legendre-Jacobi.

Digitized by Google

Forse non sarebbero stati qui inopportuni alcuni cenni sulla risoluzione diretta delle congruenze binomie, o almeno delle congruenze quadratiche secondo un modulo primo, argomento che ha dato occasione a ricerche moderne, considerando ancora che nessun'altra parte della teoria delle congruenze nel corpo razionale ha ricevuto ulteriori sviluppi dopo Gauss.

Una buona parte dell'opera è consacrata poi alla teoria delle forme quadratiche: il problema dell'equivalenza di due forme quadratiche è trattato nella maniera classica, e vi si nota un'elegante rappresentazione delle forme per mezzo di reti di punti. Questa rappresentazione costituisce un prezioso concatenamento tra la teoria delle forme quadratiche e quella del corpo numerico di secondo grado.

Dopo le nozioni preliminari sui numeri interi del corpo l'A. introduce con molta chiarezza il concetto fondamentale di *ideale,* coordinando poi gl'ideali alle forme quadratiche, definisce l'equivalenza di due ideali e dimostra che questo concetto corrisponde a quello di equivalenza di due forme quadratiche. In particolare ne trae il teorema che il numero delle classi degli ideali, come quello delle classi delle forme, è finito.

Venendo poi alle unità del corpo, egli dice come esse si ottengan tutte risolvendo l'equazione di Pell

$$t^2 - Du^2 = 4;$$

esamina allora assai accuratamente i due casi: $D<0$, e $D>0$, cui corrispondono rispettivamente un numero finito e un numero infinito di soluzioni e però di ideali unità Ne segue l'importante teorema che riconduce la determinazione di tutte le unità alla determinazione di una sola unità fondamentale, con le relative applicazioni alla teoria dell'equazione di Pell.

Nel penultimo capitolo è trattata la teoria della divisibilità nel corpo quadratico, degl'ideali primi, dell'unica decomposizione di un ideale in fattori primi ideali, delle congruenze che hanno per modulo un ideale primo e finalmente l'estensione al detto corpo del teorema di Fermat-Eulero.

In ultimo, dopo aver parlato della composizione delle forme quadratiche, l'A. ritorna alla rappresentazione geometrica e, introducendo il concetto di *numero-ideale,* perviene al teorema fondamentale della decomposizione dei numeri interi del corpo in fattori primi ideali e al carattere vero di questa decomposizione.

Il Bachmann, non perdendo di vista il fine del libro, non entra in altre questioni più complesse; Egli rimanda per maggiori sviluppi al trattato di Dirichlet-Dedekind, alla sua *Zahlentheorie,* al lavoro di Hilbert e infine all'opera recente del Sommer *Vor-*

Digitized by Google

lesungen über Zahlentheorie, della quale siam lieti di poter dare anche qui alcune notizie.

Al nuovo libro del Bachmann non può mancare il successo, e noi facciamo l'augurio che anche in Italia esso abbia numerosi lettori.

MICHELE CIPOLLA

I. SOMMER. — *Vorlesungen über Zahlentheorie. Einführung in die Theorie der algebraischen Zahlkörper.* Leipzig und Berlin, Druck und Verlag von B. G. Teubner, 1907 [Prezzo Mk. 11].

È un'opera che ben si distingue per il disegno e lo sviluppo dai trattati anche più recenti di Teoria dei numeri, fatti quasi tutto sullo stampo dell'opera di Dirichlet-Dedekind. Dell'edificio classico, quale ebbe a innalzarlo, colla mirabile forza del suo ingegno immortale, Federico Gauss, noi qui non ritroviamo che le semplici fondamenta, cioè il teorema di Termat-Eulero e le congruenze lineari, che costituiscono il primo capitolo, introduzione all'opera. Il resto è attinto alle ricerche più moderne sulla teoria dei numeri nei corpi algebrici, la quale con Dedekind e Hilbert ha ormai acquistato un bel posto nell'Analisi matematica.

Ma del vasto materiale che è stato finora accumulato sulle proprietà dei numeri di un corpo algebrico, basta una piccola parte per ricostruire la teoria dei residui quadratici e delle forme quadratiche, e questa parte è costituita dalla teoria dei numeri di un corpo di 2.° grado.

Così l'A., fin dalle prime pagine ci guida in questa teoria e coi più semplici mezzi ci conduce alle belle e difficili investigazioni, che assorbirono lungamente anche le intelligenze più esercitate alle speculazioni matematiche.

Il concetto di *ideale* vi è introdotto con mirabile chiarezza per mezzo di certe analogie che si manifestano in alcuni campi di numeri razionali nella decomposizione di un numero del campo in altri numeri del campo.

L'Autore dimostra che pei corpi quadratici pei quali sussiste un algoritmo analogo a quello di Euclide per la ricerca del massimo comun divisore non è necessaria l'introduzione del concetto d'ideale, perchè in ciascuno di tali corpi resta valida la proprietà dell'unica decomposizione dei numeri in fattori primi. Così fin da principio è resa manifesta la necessità dell'introduzione del nuovo concetto.

Le proposizioni principali della teoria sono avvalorate da esempi i quali conferiscono un notevole pregio all'opera. Difatti una delle principali difficoltà della teoria generale dei corpi algebrici è di essere troppo astratta: non è sempre facile, anzi, nei corpi di grado superiore, è addirittura impossibile il far seguire

Digitized by Google

degli esempi alla teoria. Nel corpo quadratico l'esemplificazione si può ancora praticare come nel corpo razionale, ed è così che i concetti riescono più assimilabili. Lodevolissima è dunque la cura che il Sommer ha posto nella abbondante scelta degli esempi: noi ne incontriamo nel § della divisibilità, della riduzione a forma canonica degl'ideali, a proposito dei fattori che i numeri primi razionali acquistano in un corpo quadrato, ecc. ecc. fin nelle ultime pagine dell'opera.

La teoria dell'equivalenza degl'ideali e quella delle classi d'ideali vien fondata su di un notevole teorema del Minkowski intorno alle forme lineari. Seguono quindi le relative estensioni al corpo quadratico della funzione Φ di Gauss, del teorema di Fermat-Eulero e del teorema di Wilson, delle congruenze lineari e quadratiche.

Premessi i teoremi fondamentali sulle unità viene l'Autore alla celebre legge di reciprocità dei residui quadratici, seguendo nelle sue linee generali una dimostrazione data dal Kummer. Questa parte del lavoro vien chiusa colla rappresentazione dei numeri mediante somme di quadrati.

Sulle proprietà del simbolo di Hilbert del *resto di norma* vien fondata la ripartizione delle classi d'ideali in generi e ne son tratte interessanti conseguenze intorno al numero delle classi. Colle proprietà più salienti degli *anelli di numeri* (Hilbert) si chiude il capitolo secondo.

Nel terzo capitolo sono esposte tutte le più belle applicazioni della teoria dei corpi quadratici. Vi si trovano in primo luogo le ricerche sull'ultimo teorema di Fermat, non solo cogli sviluppi di Fermat e di Legendre, ma anche con quelli dovuti a Kummer, Kronecker e Hilbert, i quali non posson trovar posto nei trattati che si occupano solamente della Teoria dei numeri nel campo razionale.

Segue poi l'importante applicazione alla teoria delle forme quadratiche, la quale ormai, dopo la teoria degl'ideali del corpo quadratico, raggiunge uno sviluppo assai rapido. Premesso infatti un opportuno coordinamento tra ideali e forme, i problemi fondamentali dell'equivalenza delle forme, della loro ripartizione in classi e in generi non sono che traduzioni facili degli analoghi problemi per gl'ideali.

Il terzo capitolo si chiude con la rappresentazione geometrica degl'ideali, interessante anche per le relazioni che il Klein ne ha tratte tra la Teoria dei numeri ed altri rami dell'Analisi matematica, come la teoria delle trasformazioni lineari, delle funzioni ellittiche, la cristallografia, ecc.

E qui l'opera avrebbe potuto avere il suo termine. L'A. in circa 250 pagine ha percorso non solo quella parte della teoria dei numeri, che suole essere sviluppata nei trattati un po' estesi, ma,

Digitized by Google

per i mezzi più efficaci di cui si giova, altre teorie complementari, dando nel tempo stesso una buona preparazione alla teoria generale dei corpi algebrici. Ma appunto per quest'ultimo scopo, egli ha creduto conveniente aggiungere due altri capitoli, riguardanti l'uno le proposizioni fondamentali della teoria dei corpi del 3.° grado, l'altro le principali nozioni intorno ai corpi relativi. In tal modo l'A. inizia semplicemente alla risoluzione di altre più complesse questioni, come quella che si riferisce alla legge generale di reciprocità, per la quale egli rimanda, per più completi sviluppi, ai lavori di Hilbert e di Furtwängler.

Crediamo che questa rapida esposizione dell'opera del Sommer basti a dare un'idea della sua importanza. Essa viene a colmare una lacuna: una trattazione completa ed elementare del corpo quadratico e delle sue più interessanti applicazioni.

Il Sommer nella prefazione modestamente dichiara che egli ha tratto l'ispirazione per il suo lavoro da un corso di lezioni che sull'argomento fece Hilbert nell'inverno dell'anno 1897-1898. Ma è certo che l'ordine e la chiarezza dell'esposizione sono pregi speciali dell'Autore, tanto che quasi non si avverte un leggiero difetto, consistente nella mancanza del numero d'ordine nei teoremi di uno stesso §, al fine di poterli richiamare subito quando occorra.

Ed ora, terminando, mi sia lecito di far l'augurio che l'opera del Sommer, indice dei progressi che la Teoria dei numeri fa in Germania anche nel campo didattico, sia anche tra noi occasione d'incitamento al fine d'introdurne lo studio in modo definitivo nelle nostre Università.

I cultori intanto di Teoria dei numeri non trascurino di leggere l'opera del Sommer, che è frutto di studio e di sincero entusiasmo, due coefficienti importantissimi, senza i quali l'Italia, che pur vanta tanta bella e lodata produzione matematica, non avrà mai, non dico un'opera, ma una ricerca sull'argomento!

MICHELE CIPOLLA

Teoria delle forme algebriche

W. SCHEIBNER. — *Beiträge zur Theorie der linearen Transformationen, als Einleitung in die algebraische Invariantentheorie.* Leipzig, B. G. Teubner 1907, 8°, p. 250 (Prezzo Mk. 10).

Siamo così abituati a veder trattate tutte le questioni relative alla teoria delle forme algebriche col mezzo della rappresentazione simbolica e nell'ipotesi che si usino sempre variabili omogenee che ricerche eseguite sopra funzioni non omogenee e col calcolo ordi-

Digitized by Google

nario sembrano appartenere ad un'èra tramontata per sempre. E tale è realmente l'impressione che ricevesi porcorrendo l'opera che annunciamo; la quale d'altronde è interessante come prova del fatto che anche strumenti semplicissimi, in abili mani, possono condurre a conclusioni di alto significato. Essa è la sintesi o lo sviluppo di parecchie note presentate dall'A. all'Accademia Sassone in numerose sedute che vanno dal 6 Giugno 1903 al 17 Giugno 1907; comprende quattro capitoli ed una lunga appendice essa pure divisa in quattro capitoli. Ecco i titoli degli uni e degli uni e degli altri:

Cap. I. La trasformazione lineare delle funzioni intere. II. Applicazione alla teoria delle equazioni algebriche. III. Applicazione alla trasformazione d'integrali ellittici. IV. Sulle equazioni di 5.° e 6.° grado.

Cap. V. Sopra la « Kreisverwandtschaft » di Möbius e la trasformazione per raggi vettori reciproci VI. Sulla teoria della trasformazione di Tschirnhausen. VII. Sulla risoluzione dell'equazione icosaedrale. VIII. Sulla trasformazione lineare delle funzioni *theta* e delle funzioni modulari ellittiche.

Quale sarà per essere l'accoglienza che i cultori della teoria delle forme faranno a questo volume è difficile prevedere; sgraziatamente l'autore non potrà assistere al proprio trionfo o rispondere agli eventuali suoi critici, essendo morto a Lipsia l'8 Aprile 1908 all'età di 82 anni. G. L.

Analisi infinitesimale

G. Petit-Bois. — *Tafeln unbestimmter Integrale.* Leipzig, Kommissionsverlag von B. G. Teubner, 1906, 4.°, p. XII+154 [Prezzo Mk. 8].

Mentre la letteratura matematica è da tempo ricca di ottime tavole d'integrali definiti, compilate da Bierens de Haan, crediamo siano quelle che oggi annunciamo le prime tavole d'integrali indefiniti. Ciò non ostante, non si può asserire che questa nuova pubblicazione venga a colmare una deplorata lacuna, giacchè sono note da tempo tutte le funzioni suscettibili d'integrazione indefinita e, d'altronde, molte raccolte di esercizi di calcolo integrale (e più d'ogni altra quella dello Schlömilch, che sembra ignota all'A.) in ultima analisi soddisfanno ai bisogni a cui intese provvedere il Sig. Petit-Bois. Ciò non toglie che il lavoro che annunciamo, grazie alla sua estensione ed al buon ordinamento della materia, possa riuscire di notevole vantaggio, purchè, ben inteso, sia esente da inesattezze, la qual cosa noi riteniamo sino a prova contraria, ma di cui non siamo in grado di farci mallevadori. G. L.

Digitized by Google

R. D'ADHÉMAR. — *Les équations aux dérivées partielles à caractéristiques réelles.* (Collection « Scientia », N. 29). Paris, Gauthier-Villars 1907 [Prezzo fr. 2].

Questo libro comincia con lo studio delle equazioni alle derivate parziali del primo ordine, e ne definisce le caratteristiche come quelle curve, che sono eccezionali per il problema di Cauchy. E ne fa le applicazioni più importanti.

Così pure per le equazioni del secondo ordine si definiscono le caratteristiche come le molteplicità, che sono eccezionali per il problema di Cauchy, e se ne fanno le principali applicazioni, con speciale riguardo ai risultati classici di Goursat.

Si passa poi alle equazioni lineari del secondo ordine, di tipo iperbolico, applicando loro i metodi di Riemann e Picard, e introducendo il concetto di *conormale,* che rende più intuitivo qualche risultato.

Si studia col metodo delle approssimazioni successive qualche equazione non lineare, finendo con un rapido, troppo rapido, riassunto delle ricerche recenti di Hadamard, Picard e Goursat.

L'A. passa quindi all'esame delle equazioni lineari in tre variabili indipendenti. E con Beudon egli definisce le superficie caratteristiche come quelle, che sono eccezionali per i classici teoremi generali di esistenza. E ricorda come, secondo Beudon e Hadamard, si possa estendere il concetto di superficie caratteristica anche a equazioni non lineari.

L'A. si volge quindi all'equazione:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} - \frac{d^2u}{dz^2} = \varphi\ (x, y, z)$$

e stabilisce la formola di Volterra, insistendo sulle relative verifiche, e sui teoremi di esistenza, connessi con quella formola.

L'ultimo capitolo è, più che un sommario, un elenco di memorie pubblicate o da pubblicarsi, che generalizzano le applicazioni della teoria delle caratteristiche e delle formole di Riemann e di Volterra. L'elenco non è però completo: non si fa p. es. alcun cenno dell'estensione del metodo di Riemann alle equazioni lineari del 3° ordine, o di ordine più elevato in due variabili indipendenti

G. FUBINI

Digitized by Google

J. A. SERRET. — *Lehrbuch der Differential-und Integralrechnung. Nach* AXEL HARNACK'S *Ubersetzung. Dritte Auflage, neu bearbeitet von* GEORG SCHEFFERS. I Band, *Differentialrechnunp,* mit 70 Figuren im Text. 8.° p. XVI+624. Leipzig, Teubner 1906. II Band, *Integralrechnung,* mit 105 Figuren in Text. Ib. id. 1907, p. XIV+585. [Prezzo di ogni vol. leg. Mk. 13].

Estratto dalla Prefazione al I volume:

« Nell'anno 1894 cominciò ad uscire per la prima volta la traduzione tedesca del « Cours de calcul différentiel et intégral » di J. A. Serret, fatta da Axel Harnack. Siccome questi non volle aumentare la mole dell'originale, così fece stampare le considerevoli mutazioni ed aggiunte, che gli sembrarono necessarie, in carattere più piccolo. Egli diede grande importanza all'esattezza delle dimostrazioni e così aggiunse all'eleganza dello stile del Serret la profondità tedesca.

Quando si manifestò il bisogno di una seconda edizione di quell'opera così ricercata, Giorgio Bohlmann, dopo la morte dell'Harnack, si assunse di curarla, e fece molti utili mutamenti, divise i singoli capitoli in tanti paragrafi portanti ciascuno un titolo speciale, fuse nel testo le osservazioni critiche di Harnack e diede maggiore importanza alla rappresentazione geometrica.

Esaurito il I vol. (1897) della seconda edizione, dietro invito dell'editore, io mi dichiarai disposto ad assumere la nuova redazione di tutti i tre volumi dell'opera. Ora, all'apparizione della terza edizione del primo debbo render conto dei cambiamenti che mi parvero necessari . . . .

Dirò ora in breve dei principali cambiamenti sostanziali. Anzitutto alcune dimostrazioni dovettero esser rese più rigorose. Per ciò fu necessario di premettere una esposizione, naturalmente concisa, del concetto di numero. Solo così fu, ad esempio, possibile di dare dimostrazioni analitiche rigorose dei teoremi sulle funzioni continue e dei criteri di convergenza delle serie infinite. Le considerazioni relative alle funzioni esplicite vennero adunate in un capitolo, perchè poggiano su ipotesi relative alla teoria delle funzioni assai più vaste di quelle concernenti le funzioni esplicite. Qui si offerse il destro per introdurre il concetto di funzioni ed equazioni indipendenti e di determinante funzionale. Le difficoltà inerenti alla teoria dei massimi e minimi delle funzioni a più variabili furono meglio approfondite. Molti cambiamenti subirono i capitoli relativi alle applicazioni del calcolo differenziale alla geometria. Anzitutto il metodo di esposizione non permetteva la determinazione precisa del segno delle radici quadrate, la quale era tuttavia indispensabile quando, come fa il Serret, ci si limita al campo reale. Ivi fu fatta una mutazione radicale e così potè essere rimosso un errore vera-

Digitized by Google

mente inesplicabile che si trova nella seconda edizione, relativo al segno della curvatura. Le considerazioni sui punti singolari delle curve piane vennero riordinate e furono aggiunte delle osservazioni sui calcoli con coordinate polari e sui vertici delle curve piane. La deduzione dei criteri pei contatti di ordine superiore fu in parte mutata. Le evolute planari e filari vennero chiaramente caratterizzate e trattate più esattamente. I concetti: « superficie delle tangenti » di una curva sghemba e « superficie sviluppabile » non furono come accadde finora ritenuti senza prova per identici.

Nella teoria dell'indicatrice di un punto si è risaliti all'originaria concezione di Dupin e si è così evitato un errore che si trova in molti trattati sulla teoria delle superficie. Una quantità di altri piccoli errori nella teoria delle curve e superficie trovasi ora eliminata. Il capitolo sulla teoria elementari di variabili complesse fu del tutto rifatto. In ciò io sono partito dal concetto di esporre quanto fosse indispensabile in seguito nel calcolo integrale e nella teoria delle equazioni differenziali; per ciò, ad esempio, fu bandita come troppo difficile la rappresentazione conforme. L'ultimo capitolo sulla decomposizione in frazioni semplici non subì che cambiamenti di forma ».

Non meno utili, ben intese e profonde di quelle che ebbe il I sono le modificazioni subite dal II vol. dell'opera nel passare dalla II alla presente edizione. Grazie alla grande importanza che tuttora possiede venne anche opportunamente riprodotta (con lievi ritocchi) l'appendice sulla serie di Fourier scritta dall'Harnack per la I ed.

G. L.

U. Dini. — *Lezioni di analisi infinitesimale, riprodotte con alcune modificazioni e aggiunte dalle lezioni dettate la prima volta nell'anno scolastico 1876-77 nella R. Università di Pisa, e successivamente autografate nel 1877-78.* — Vol. I. Calcolo differenziale. Pisa, Nistri, 1907. 8° gr. p. CI+720 [Prezzo L. 22].

Di quest'opera non è il caso, malgrado la sua notevole importanza, di fare una lunga recensione. Le magistrali lezioni di Calcolo infinitesimale che il prof. Dini va dettando da trent'anni nell'Università di Pisa, benchè riprodotte finora soltanto in litografia, sono ben note in Italia e all'estero, e ad esse hanno attinto largamente tutti i giovani analisti. Il prof. Dini ha voluto pubblicarle ora per le stampe nella loro forma originale, indicando scrupolosamente i pochi mutamenti introdottivi, per mostrare, egli dice, « quale si « fosse nel 1877 — all'introduzione dei nuovi metodi — l'insegna- « mento del Calcolo in questa Università alla quale mi legano tutti « i ricordi della mia vita ». Certo noi avremmo festeggiato maggiormente una *nuova* opera dell'illustre analista pisano, la quale

Digitized by Google

ci presentasse una sintesi, fatta dalla sua mano maestra, dello stato odierno del Calcolo; ma dobbiamo pur sempre essergli grati per avere affrontato la non lieve fatica di rivedere e ripubblicare le le sue classiche lezioni, che diverranno così assai più facilmente accessibili a tutti.

Le aggiunte non sono molto numerose nè molto importanti, e consistono in gran parte in note a piè di pagina. Sono nuovi i paragrafi su alcune formole relative alle differenze finite (§§ 110-115), sugli asintoti (§§ 287-291), sui punti critici delle curve gobbe (§§ 424-450), e sui sistemi doppiamente infiniti di superficie (§§ 473-477). Molto opportunamente poi l'autore ha premesso al suo corso una lunga Introduzione, tolta in massima parte dai suoi *Fondamenti,* contenente i preliminari analitici su cui si basa il calcolo: gruppi di numeri, limiti, funzioni, continuità e discontinuità, serie a termini variabili.

G. VIVANTI

H. DURÈGE. — *Elemente der Theorie der Funktionen einer komplexen veränderliche Grosse. In fünfter Auflage neu bearbeitet von* L. MAURER. Mit. 41 Figuren in Text. 8.° p. X+398. Leipzig, Teubner 1906. [Prezzo del vol. leg. Mk. 10.].

Il Prof. Maurer, invitato dalla Casa Teubner a curare una nuova edizione del noto trattato del compianto Prof. Durège, vide tosto che il suo còmpito poteva limitarsi a qualche semplice ritocco di forma, ma più utilmente poteva allargarsi sì da avere per risultato un'opera nuova. Che egli abbia risolutamente scelta questa seconda strada risulta già dal fatto che dal titolo primitivo dell'opera in discorso scomparve una frase assai significativa (« mit besonderer Berücksichtigung der Schöpfungen Riemann's ») ed ancor meglio paragonando gli indici dei capitoli che compongono risp. le ed. III e V. Tale confronto è così istruttivo che vogliamo porgere al lettore il mezzo per compierlo:

III ed.: Introduzione. — I. Rappresentazione geometrica delle quantità immaginarie. — II. Generalità sulle funzioni di una variabile complessa. — III. Funzioni a più valori. — IV. Integrali di funzioni di variabili complesse. — V. Le funzioni esponenziale e logaritmica. — VI. Proprietà generali delle funzioni. — VII. Infiniti ed infinitesimi delle funzioni. — VIII. Integrali. — IX. Superficie semplicemente e molteplicemente connesse. — X. I moduli di periodicità.

V. ed.: Introduzione. — I. Definizioni e teoremi sulla teoria delle quantità reali e delle loro funzioni. — II. Quantità complesse e loro rappresentazione geometrica. — III. Definizioni relative alle

Digitized by Google

funzioni analitiche di una variabile complessa ed ai loro integrali. — IV. Serie e prodotti infiniti. — V Funzioni uniformi di una variabile complessa. VI Funzioni biperiodiche. — VII. Funzioni a più valori. — VIII. Funzioni algebriche. — IX. Equazioni differenziali lineari di second'ordine.

Non solo il piano dell'opera, ma l'indirizzo generale di essa venne totalmente cambiato: in origine essa aveva lo scopo di rendere accessibili le produzioni di Riemann, ora essa tende ad avviare verso quei campi di studio (funzioni automorfe) che attualmente si coltivano con più intensità; in origine era Riemann che dava il tono a tutta la musica, ora è invece Weierstrass che domina da sovrano! E poichè ciò è per fermo pienamente conforme allo spirito dei tempi, va data lode al Prof. Maurer per l'opera da lui compiuta; solo vien fatto domandare se non era meglio dichiarare senz'altro che si è in presenza di un'opera nuova e così sopprimere l'introduzione storica, che ci sembra ormai invecchiata (non fosse altro perchè fra i precursori della moderna teoria delle variabili complesse si cercano invano Gauss e Wessel). Se ci siamo permessi di lamentare che la merce di fabbrica Maurer porti il marchio della rinomata officina Durège gli è anche perchè pensiamo come il sistema adottato in questa pubblicazione (e non in essa soltanto!) darà molto filo da torcere al futuro storico della matematica moderna, quando, da giudice imparziale, vorrà dare ***unicuique suum.***

G. L.

H. DURÈGE. — ***Theorie der elliptischen Funktionen in fünfter Auflage neu bearbeitet von*** LUDWIG MAURER. Mit 36 Figuren im Text. Leipzig, B. G. Teubner, 1908. 8.° p. VIII+436. [Prezzo del vol. leg. Mk. 11].

Le osservazioni fatte sul volume precedente possono integralmente applicarsi al presente, che di quello può riguardarsi come continuazione o complemento, ed in cui il Prof. Maurer volle introdurre le notazioni ed i concetti con cui il Weierstrass innovò radicalmente la teoria jacobiana delle funzioni ellittiche. Per dare ai nostri lettori un'idea dell'opera in discorso ne riferiremo l'indice:

I. Teoria elementare degli integrali ellittici.

II. Studio, dal punto di vista funzionale, delle funzioni razionali delle quantità x e $\sqrt{f(x)}$, col mezzo di una superficie di Riemann T.

III. Gli integrali delle funzioni razionali sulla superficie riemanniana T.

IV. Rappresentazione delle funzioni razionali sulla superficie T mediante funzioni trascendenti.

V. Rappresentazione delle funzioni ellittiche.

Digitized by Google

VI. Applicazioni delle funzioni ellittiche: a) Cubiche piane; b) Coordinate ellittiche; c) Pendolo sferico; d) Rotazione d'un grave attorno al suo baricentro.

VII. Teoremi relativi alla teoria dei gruppi.

VIII. Divisione e trasformazione.

IX. Le funzioni modulari.

Quadro delle principali formole.

G. L.

NECROLOGIO

Antonio von Braunmühl

di S. Günther (1)

Il ramo di scienza a cui è consacrato il presente periodico ha perduto il 7 marzo 1908 uno delle sue personalità più eminenti. Una malattia renale, lieve da prima, ma poi straordinariamente violenta, abbattè il Dott. Antonio von Braunmühl, professore ordinario di matematica nel Politecnico di Monaco.

Il compianto scienziato, benchè proveniente da antica famiglia bavarese, di nascita fu un Transcaucaseo, avendo veduta la luce il 10 Dicembre 1853 a Tiflis, ove suo padre era stato chiamato in qualità di architetto. Dopo l'immatura fine di questo, a tre anni il bimbo ritornò a Monaco, città che egli ha poi sempre considerata come la vera sua patria. Ivi egli compì i propri studi ginnasiali nel 1873; ivi frequentò i due istituti d'istruzione superiore; ivi acquistò successivamente come assistente, come professore di scuola tecnica, come professore ginnasiale e come libero docente quelle rare facoltà didattiche che lo fecero distinguere fra molti. Nel 1888 fu nominato professore straordinario nel Politecnico e nel 1892 promosso ordinario Il suo ufficio d'insegnante si aggirò per molti anni nelle discipline introduttorie, analisi algebrica, trigonometria e geometria sintetica; ma più tardi, assieme ai suoi colleghi von Dyck e Finsterwalder, partecipò a corsi di tre semestri sulle matematiche superiori.

Emerge da ciò che le sue occupazioni ufficiali erano così gravi da essere sufficienti ad assorbire la totale attività di un uomo; tuttavia sino dal 1890 egli cominciò ad aggiungervi delle lezioni regolari sopra la Storia delle matematiche; a tale corso egli ag-

(1) Necrologia pubblicata in tedesco nel XXVIII Heft delle « Mittheilungen zur Geschichte der Medizin und Naturwissenschaften »; tradotto col consenso dell'illustre autore.

Digitized by Google

gregò poi un « Seminario », l'unico che si conosca ancora oggi. Il numero degli studenti che parteciparono a tali esercitazioni non era certamente considerevole; ma la maggior parte di quelli che si lasciarono avvincere dalla personalità del maestro e dal suo entusiasmo pel seducente argomento, perseverarono vigorosamente e da lui appresero l'arte non facile (eppur così poco apprezzata!) di leggere le opere originali, le quali in generale sono scritte in un linguaggio così difficile da riuscir quasi inintelliggibili pel lettore moderno e di fare intorno al loro contenuto delle lucide relazioni. Così v. B. percorse coi propri discepoli tutta una serie di classici matematici ed alcuni studenti trovarono ivi materia e stimolo per ottime Dissertazioni dottorali. Quindi con sgomento sorge il dubbio che, con la morte del fondatore di tale istituto, così onorevole pel Politecnico di Monaco, esso pure possa avere una fine immatura.

La vita di v. B. fu conforme a quella del vero scienziato tedesco. Vivendo esclusivamente per la scienza, la cattedra e la famiglia, era alieno dalla grande pubblicità, epperò, specialmente da giovane, tiepido amico delle grandi adunanze. Tuttavia il congresso internazionale dei matematici di Heidelberg (1904) ebbe il potere di vincere quella repugnanza; epperò, prima che la sua salute fosse stata scossa, egli aveva fatto il progetto di andare a Roma, per riannodare antiche relazioni e farne di nuove, in occasione del Congresso tenutosi colà durante le feste di Pasqua del 1908. Sgraziatamente quando ebbe luogo la seduta inaugurale, egli giaceva nella tomba da quasi quattro settimane.

Da un matrimonio oltremodo felice durato ventinove anni, nel corso di cui però non gli furono risparmiati acerbi dolori, nacquero due figli, ora totalmente affidati alla vedova inconsolabile.

Volgendoci ai lavori letterari del Nostro diligentissimo scienziato, dobbiamo qui sorvolare sopra quelli aventi un carattere puramente teorico. Sotto l'influenza del Brill, poco dopo trasferito da Monaca a Tubinga, vide la luce il lavoro di laurea *(Geodätische Linien auf Rotationsflächen und ihre Einhüllende;* München 1878); così v. B. venne condotto in un campo d'indagini promettente una ricca messe di risultati. Lavori suoi sopra le geodetiche comparvero nei *Mathematische Annalen,* nei *Sitzungsberichte* dell'Accademia bavarese e nei *Blätter für die bayer. Gymnasien.* Più tardi lo incatenarono le così dette funzioni (θ) sopra le quali egli pubblicò delle memoria di cospicuo valore tecnico *(Abhandlungen* dell'Accademia bavarese e *Mathematische Annalen* T. 32 e 37), che furono altamente apprezzate dai competenti.

Ad una circostanza casuale si deve la prima pubblicazione storica di v. B. Per la « Bayer. Bibliothek » pubblicata da J. Trautmann e K. v. Reinhardstoettner egli compose un succoso volumetto

Digitized by Google

Christoph Scheiner als Mathematiker, Physiker und Astronom (Bamberg 1891). Nel quale si trova egregiamente analizzata la poliedrica e feconda attività del celebre Gesuita, che notoriamente ha sostenuta una parte importante (ma di cui non si è il caso di rallegrarsi!) nella storia di Galileo. Egli è poi l'inventore del « Pantografo », uno dei fondatori dell'ottica fisiologica e più di tutto l'autore della grande opera « Rosa ursina », che contieme importantissimi contributi alla teoria delle macchie solari. v. B. fu da ciò indotto ad occuparsi della storia di tale fenomeno; e fra i tesori della biblioteca di Monaco scoprì intere serie di osservazioni, non ancora utilizzate, di fisica solare e ne fece una Relazione pubblicata nei *Beilage d. allg. Zeitung* e nel *Jahrbuch für Munchenr Geschichte*. Da tale momento la storia dell'astronomia occupò molte delle sue ore libere; e nel ciclo di conferenze organizzate dall'Università popolare di Monaco (« Volkhochschulverein der Hauptstadt ») tenne una serie di apprezzatissime letture sopra l'astronomia popolare. Nei *Biogr. Blättern*, di cui egli fu collaboratore fedele sino al termine della sua troppo breve esistenza, inserì un saggio sopra Galileo, mentre in *Himmel und Erde* ne pubblicò uno su Copernico ed altro interessantissimo sopra lo sviluppo storico della cosmogonia.

Ma presto anche la storia della geometria lo attrasse quale campo di lavoro letterario originale. Quando nel 1892 ebbe luogo a Monaco la riunione dei matematici tedeschi, fu organizzata una estesa esposizione di modelli ed apparecchi matematici e nel relativo Catologo, pubblicato sotto la direzione del Prof. v. Dyck, si legge del Nostro un *Historische Studie über die organische Erzeugung ebener Kurven von den altesten Zeiten bit zum Ende des XVIII Jahrhunderts,* breve schizzo in cui spiccano chiaramente tutte le doti dello stile di v. B, giacchè egli seppe raccogliere tutto un materiale difficilmente accessibile e elaborarlo da un unico punto di vista. Tale fu sempre la via che egli tenne quando si dedicò agli studi che dovevano costituire poi la parte più cospicua della sua opera. Abbiamo già visto che una delle sue incombenze sia stata di insegnare ai giovani matematici e tecnici, che già conoscevano un po' di trigonometria, tale disciplina, di cui è nota l'importanza per tutte le applicazioni; onde il suo corso doveva consistere in parte in una ripetizione, ma doveva anche rivelare un ordine d'idee totalmente nuovo Nell'interesse di questa « Trigonométrie complémentaire » (per usare un nome introdotto nella scienza un secolo fà dal Lacroix) egli investigò anche gli anteriori stadi di sviluppo di questa parte delle matematiche e così pervenne alla conclusione che ancor molto ci fosse da chiarire e completare. Con ostinata perseveranza egli procedette nella strada tracciatasi ed una ricca messe lo ricompensò pel suo lavoro di ricerca (che così spesso

Digitized by Google

sembrava ingrato!) compiuto in un cammino svolgentesi fra arbusti di spine e macchie foltissime.

Volendo esattamente misurare tale lavoro bisogna anzitutto dirigere la propria attenzione alla *Bibliotheca mathematica* pubblicata dall'Erneström e percorrere parecchi volumi di questo ricco periodico. La teoria del triangolo polare, la storia della lingua simbolica usata nella trigonometria, il problema dell'interpolazione, la preistoria del teorema di Moivre ($e^{mxi} = \cos mx + i \operatorname{sen} mx$) e segnatamente la trasfigurazione subita per opera di Eulero di tutto il calcolo trigonometrico egli fece oggetto di impressionanti esposizioni. Inoltre egli ha mostrato che la rappresentazione di una sfera su di un piano, nota ai Greci sotto il nome di Analemma, si otteneva, non con una projezione stereografica, ma con una ortografica; in conseguenza — come ebbe a notare lo Zeuthen sotto la forma più lusinghiera — emerse un modo totalmente nuovo di concepire la Sferica degli antichi. Una prima tappa in tali ricerche di v. B. è attestata da due memorie originali accolte nei *Nova Acta* della Leopoldin. Karol. Akademie *(Beitrage zur Geschichte der Trigonometrie; Nasir Eddin Tusi und Regiomontanus,* entrambi nel vol. LXXI di quella raccolta). Questa seconda memoria ci meravigliò con la prova inoppugnabile ivi recata che già nel secolo XIII quell'astronomo arabo-persiano aveva creato un sistema completo e perfettamente esatto della trigonometria sferica e piana, il cui nocciolo sta nella discussione di un quadrangolo sferico completo, e che, quindi, quel celebre matematico tedesco non può ragionevolmente gloriarsi di una scoperta a lui generalmente attribuita.

Questi ed altri lavori preparatori condussero a quell'opera che (ci sentiamo in grado di sostenerlo!) trasmetterà il nome di v. B. anche alle generazioni venture. Parliamo della *Geschichte der Trigonometrie* (I Bd. 1900; II Bd. 1903; Leipzig B. G. Teubner). Che essa avesse la sua ragione di esistere anche accanto alla *Vorlesungen ueber Geschichte der Mathematik* di M. Cantor avrà potuto apparire problematico quando essa venne annunciata; ma oggi nessuno può dubitare che entrambe abbiano il diritto di esistere l'una accanto all'altra. A provarlo basti notare che la seconda parte di essa si estende sino ai tempi più recenti ed espone con ammirabile completezza al lettore le sorprendenti conquiste fatte nel corso del secolo XIX. Accanto alla trigonometria propriamente detta vengono considerate le serie e le tavole ausiliarie pel calcolo numerico e chi in particolare agogna a formarsi un chiaro concetto della difficile storia della scoperta dei logaritmi non può affidarsi ad una guida più degna di fede.

Alcuni bei progetti, ventilati dall'estinto con me, saranno sepolti con lui. Uno però, che tanto lo occupò, possiamo sperare che possa

Digitized by Google

venire effettuato v. B. erasi cioè accordato con chi scrive le presenti linee per scrivere una *Geschichte der Mathematik* divisa in due volumi e destinata a maestri e discepoli, la quale doveva far parte della nota « Sammlung Schubert ». Il I volume, estendentesi sino a Descartes, giunse nelle mani del suo autore il giorno stesso della morte del diletto amico Sintanto che si ignorò fino a quale punto erano stati spinti i lavori preparatori di v. B., era difficile di pronunciare un sicuro giudizio intorno al proseguimento dell'opera; ma dopo di avere constatata l'esistenza di un grosso manoscritto fra le carte lasciate dal rimpianto geometra, si può ritenere fondata la speranza che quell'opera possa venire compita.

Non ripeteremo qui l'osservazione, che s'incontra in pressochè tutte le necrologie, che le onorificenze dovrebbero accompagnare costantemente le opere scientifiche. L'opera di v. B. non era destinata a giungere sino al gran pubblico e che la storia delle scienze esatte non abbia il potere di dare estesa rinomanza è cosa che non ha bisogno di venire dimostrata ai nostri lettori. Nel 1897 v. B. ottenne il diploma di membro dell'anzidetta « Akademie der deutschen Naturforscher » e nel 1904 l'ordine di S. Michele di IV Classe. La dote così comune di porre in mostra il proprio potere e sapere fu a lui totalmente negata ed era necessario che i suoi più intimi amici lo spronassero vivamente per ottenere da lui che almeno ponesse la fiaccola sotto il moggio Tanto più grande era la sua modestia, quanto spontanee furono la riconoscenza e la stima a lui tributate da tutti coloro che lo conobbero come scienziato e come uomo; in particolare dai suoi studenti venne venerato come maestro benedetto ed in pari tempo come padre ed amico. Un carattere di bronzea fermezza si univa in lui ad un cuore dolce e bonario. Come dotto e come uomo A. von Braunmühl sopravviverà nella memoria di tutti coloro a cui il destino concesse di incontrarlo.

NOTIZIE

IV Congresso Internazionale dei Matematici. — Siamo lieti di annunziare ai nostri lettori che la pubblicazione degli *Atti del IV Congresso internazionale dei matematici,* assunta dalla Tipografia della R. Accademia dei Lincei, sotto la direzione del Segretario generale Prof. G. Castelnuovo, procede con la massima sollecitudine. Dei tre volumi che costituiranno tali *Atti* (di complessive pagine 1200 circa) il primo *(Relazione sul Congresso; Conferenze)* venne già pubblicato. Seguiranno gli altri due volumi a brevi intervalli. Confidiamo dunque di vedere l'opera completa poco dopo trascorso l'anno dalla chiusura del Congresso.

Digitized by Google

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E STORIA

DELLE

SCIENZE MATEMATICHE

ANNO XI — Luglio, Agosto e Settembre — 1908

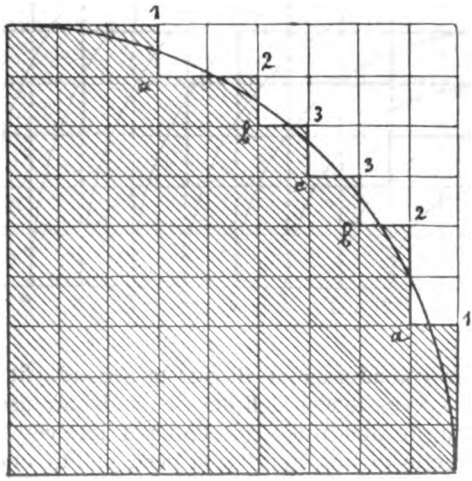
Sulla quadratura del circolo secondo l'egiziano Ahmes

Nota di G. VACCA

Nella terza edizione della sua *Geschichte der Mathematik* (t. I, pag. 97) Moritz Cantor, parlando della misura del circolo, quale si trova nel numero 50 del *Papyrus Rind,* dice: « Sie ist eine wirkliche Quadratur zu nennen, indem sie lehrt ein Quadrat zu finden, welches dem Kreise flächengleich sei, und zwar wird als Seite des Quadrates der um $^1/_9$ seiner Läng everminderte Kreisdurchmesser gewählt. Wie man zu dieser Vorschrift gekommen sein mag ist nicht entfernt zu erraten. Gesichert ist sie durch wiederholtes Auftreten, gesichert ist auch ihre ziemlich gute Anwendbarkeit, denn sie entspricht einem Werte $\pi = (8:9)^2 = 3,1604 \ldots$ ».

Mi sembra di aver trovato un modo che potrebbe non esser diverso da quello degli antichi Egiziani per convincersi della esattezza di questo risultato, od almeno potrebbe far intuire per quale via vi siano giunti.

1.° Questo modo consiste nella considerazione della figura seguente:



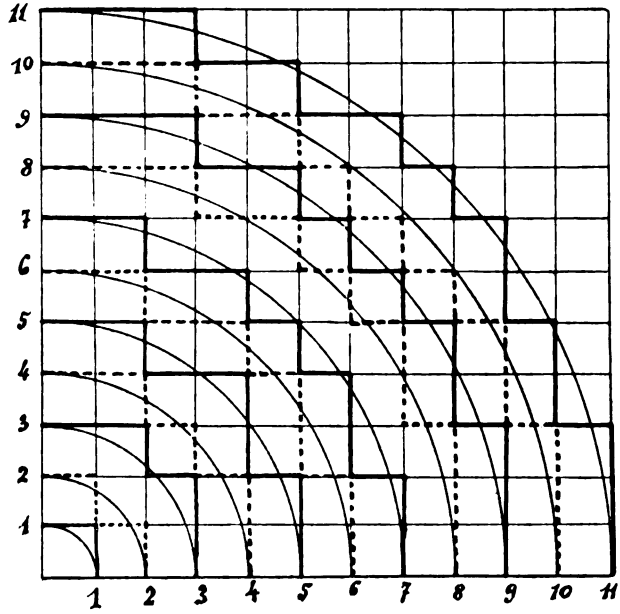
Digitized by Google

Essa consta di un quadrante di circolo, disegnato sopra un reticolato a maglie quadrate, con raggio eguale a nove volte il lato di una maglia. Si vede dalla figura che quest'arco di cerchio assieme ai due raggi che limitano il quadrante, comprende presso a poco 64 caselle (ombreggiate nella figura), e che le parti di alcune di queste 64 caselle che escono dal quadrante, indicate con i numeri 1, 2, 3, 3, 2, 1 compensano abbastanza bene le parti del quadrante che esse non comprendono, indicate con le lettere a, b, c, b, a.

Quindi l'area del quadrante sta a quella del quadrato circoscritto come 64 ad 81, ed il lato di un quadrato equivalente in area al quadrante è eguale al lato del quadrato circoscritto, diminuito di un nono.

Gli egiziani avevano famigliari i reticolati a maglie quadrate, che essi adoperavano con vari modelli che si trovano, ad esempio, nel Museo Egiziano di Torino, come i pittori fanno ancor oggi, per ingrandire od impiccolire disegni secondo una determinata scala.

Essi conoscevano pure l'uso del compasso: è quindi verosimile che abbiano potuto fare il ragionamento che precede.



2.° Dalla considerazione di questa seconda figura, che non è altro che una successione indefinita di quadranti disegnati sopra un reticolato a maglie quadrate ed aventi per lato rispettivamente 1, 2, 3, . . . volte quello di una maglia, si vede subito che per tutti gli

Digitized by Google

altri quadranti il compenso tra le parti sporgenti e quelle rientranti del sistema di maglie che copre nel miglior modo possibile ciascun quadrante, si fa assai meno bene che non per il quadrante di lato 9, e che di più, nessun altro di questi sistemi di maglie, almeno per una serie abbastanza lunga di quadranti, ha un numero di maglie eguale ad un quadrato perfetto, e che infine la radice del quadrato corrispondente al quadrante di lato 9 è 8, come si è visto. Ed ora la frazione $^8/_9$ o meglio $1 - {}^1/_9$ risponde al criterio di *semplicità* delle frazioni che avevano gli antichi Egiziani (secondo lo stesso papiro: cfr. G. Loria, Biblioteca Mathematica, 1892, pag. 97).

La considerazione di questa figura, che si potrebbe forse anche trovare come motivo decorativo in qualche monumento architettonico, può aver condotto gli Egiziani a ritenere che il valore trovato fosse il migliore tra gli altri dello stesso genere, e forse anche a credere nella sua esattezza.

3.° È utile considerare i valori per π che si ricavano dalla considerazione dei quadranti della fig. 2.

Essi sono:

$$\pi = 4;\ = 3;\ = \frac{24}{9} = 2{,}7;\ = \frac{52}{16} = 3{,}25;\ = \frac{80}{25} = 3{,}20;\ = \frac{122}{36} = 3{,}111;$$

$$\pi = \frac{148}{49} = 3{,}02;\ = \frac{208}{64} = 3{,}25;\ = \frac{256}{81} = 3{,}1604;\ = \frac{308}{100} = 3{,}08;\ = \frac{376}{121} = 3{,}107$$

Da essi si vede pure che il valore prescelto dagli Egiziani è il più conveniente.

Firenze, Gennaio 1909.

Funzioni automorfe

G. Fubini. — *Introduzione alla teoria dei gruppi discontinui e delle funzioni automorfe.* Pisa, E. Spoerri, pag. XIII+416. [Prezzo L. 15].

Scopo del trattato di cui ci occupiamo, come dice l'A. nella prefazione, è di presentare un quadro di insieme della teoria dei gruppi discontinui e delle funzioni automorfe in una o più variabili, di raccogliere i principali risultati fin qui ottenuti, di notare i legami che uniscono queste teorie alle altre parti dell'analisi moderna. Onde in tutto il volume il Fubini si è sforzato di subordinare il più possibile le varie trattazioni comprese nel vasto argomento a concetti generali, e di quelle si è limitato ad esporre le parti che meglio convenivano ad illuminare questi. Il piano del libro è quindi assolutamente nuovo e si discosta completamente da quello del noto trattato di Klein e Fricke.

Digitized by Google

A rendere più agevole la lettura del libro, il Fubini volle supporre noti al lettore i soli fondamenti della teoria delle funzioni di variabile complessa e delle funzioni algebriche, onde fu indotto a raccogliere nella prima parte alcune nozioni sussidiarie sui gruppi di trasformazioni e sulle metriche.

Non ci tratteniamo a lungo sulle nozioni di teoria dei gruppi: l'A. si limita a richiamare le definizioni che ad essi si riferiscono con particolare riguardo ai gruppi di trasformazioni lineari; classifica i gruppi nelle tre classi: gruppi discontinui finiti, gruppi discontinui infiniti, gruppi continui (finiti ed infiniti), che esemplifica largamente. Indica quando un gruppo discontinuo infinito possiede trasformazioni infinitesime (di Klein), insistendo sul senso che alla nozione di trasformazione infinitesima si viene così ad attribuire nella teoria dei gruppi discontinui, totalmente diverso da quello che assume nella teoria dei gruppi continui di Lie.

Più notevole è la parte riguardante le metriche. In uno spazio S di n dimensioni in cui siano coordinate $x_1\ x_2 \ldots x_n$, è definita una metrica, secondo l'ordinaria nozione della geometria differenziale, quando è data una forma differenziale quadratica quale elemento lineare: $ds^2 = \Sigma\, a_{ik}(x)\, dx_i\, dx_k$; tale metrica è reale in una regione dello spazio S se la forma è definita positiva quando alle x si diano valori reali appartenenti a quella regione. Ed è noto come allora si possano definire i concetti di geodetica, distanza, volume, angolo. Movimento nella metrica considerata è una qualunque trasformazione che muti in sè l'elemento lineare. Agli scopi della teoria delle funzioni automorfe è specialmente utile lo studiare le metriche che ammettono, come gruppo di movimenti, un dato gruppo lineare, od un gruppo a questo isomorfo. Se G è un gruppo di trasformazioni reali lineari omogene che trasformino in sè una forma $V(x_1\ x_2 \ldots x_n)$ di grado m, si osservi che esso trasformerà in sè anche la s-esima polare $F_s(y; x)$ di V (x), e cioè la forma di grado s nelle y e di grado m-s nelle x che si ottiene operando su V (x) s volte con la $\Sigma\, I_i \frac{\partial}{\partial x_i}$;

segue allora che G è un gruppo di movimenti per la metrica il cui elemento lineare è $ds^2 = h\, F_2(dx; x)$ dove h è una costante arbitraria. E ancora, se si immaginano le $x_1, x_2 \ldots x_n$ legate dall'equazione $V(x_1, \ldots, x_n) = k$, le $x_2 \ldots x_n$ possono prendersi come coordinate in uno spazio ad n — 1 dimensione; ed il gruppo G indurrà in questo un gruppo Γ che può interpretarsi come gruppo di movimenti nella metrica il cui elemento lineare è $ds^2 = hF_2(dx; x)$ dove le variabili x ed i loro differenziali dx si pensino legati dalle equazioni $V(x) = k$, $F_1(dx; x) = 0$. E tale metrica sarà reale in quella regione dello spazio in cui le varietà $F_2(z; x) = 0$, $F_1(z; x) = 0$ (dove le z si pensino variabili correnti) non hanno punti comuni.

Digitized by Google

Supponiamo in particolare che la $V(x_1 x_2 .. x_n)$ sia una forma quadratica: si ottengono le metriche a curvatura costante; tra esse esistono due soli tipi di metriche reali: le ellittiche e le iperboliche, a seconda che la $V(x)$ — o rappresenta una quadrica immaginaria, o reale non rigata.

L'A. si sofferma a lungo su di esse, ne dà la rappresentazione conforme sullo spazio euclideo, ne studia le geodetiche e le distanze, ne determina i movimenti e li classifica in movimenti di prima e seconda specie, e quelli di prima specie distingue in ellittici, parabolici, iperbolici, ellittico-iperbolici e ellittico-parabolici. Particolarmente notevole è il caso delle metriche a due o tre dimensioni, i cui movimenti si collegano in modo assai semplice alle trasformazioni lineari unimodulari sopra una variabile complessa a coefficienti reali o complessi.

Analoghi risultati si hanno quando G sia un gruppo di trasformazioni lineari omogenee a coefficienti complessi che trasformi in sè una forma hermitiana. Se in particolare si tratta di una forma hermitiana quadratica si ottengono le metriche che l'A. dice hermitiane. Anche qui esistono due soli tipi di metriche hermitiane reali: le ellittiche e le iperboliche: e come per le metriche a curvatura costante si possono per esse studiare le geodetiche, i volumi, ecc.

Sia G un gruppo lineare discontinuo su n variabili complesse $x_1 x_2 .. x_n$: ***funzioni automorfe rispetto a G*** si dicono quelle funzioni uniformi z di $x_1 x_2 .. x_n$ che sono invarianti per G. Sia Γ un gruppo di trasformazioni lineari omogenee su m variabili $z_1, z_2, \ldots, z_m$ isomorfo a G: se le z sono funzioni uniformi delle x tali che quando le x subiscono una trasformazione di G, le z subiscono la corrispondente di Γ, le z diconsi formare un sistema di ***funzioni zeta automorfe rispetto a G e*** Γ. Se G e Γ sono di trasformazioni birazionali le funzioni diconsi ***cremoniane*** e ***zetacremoniane***. Ed i problemi fondamentali della teoria sono: 1.° dato G trovare, ***se possibile,*** le funzioni automorfe rispetto a G, e più precisamente trovare i sistemi di n funzioni automorfe indipendenti; 2.° dato G e Γ, trovare, ***se possibile,*** i sistemi di m funzioni zeta automorfe corrispondenti. Analoghi problemi si pongono per le funzioni cremoniane e zetacremoniane: l'A. li lascia generalmente fuori del quadro dei suoi studi, quantunque molti dei risultati valgano anche per queste funzioni o per loro particolari classi: il che del resto risulta evidente quando si pensi che una trasformazione sulle variabili indipendenti porta da una funzione automorfa ad una funzione cremoniana.

Nell'enunciare i nostri problemi abbiamo detto: *se possibile,* poichè i gruppi G e Γ non possono essere arbitrarii: se il gruppo lineare G contiene operazioni infinitesime (di Klein) non esistono

Digitized by Google

funzioni automorfe rispetto ad esso che non siano invarianti anche per tutto un gruppo continuo lineare ad parametro almeno; di più ancora, non può esistere un sistema di n funzioni automorfe indipendenti se il gruppo G non è *propriamente discontinuo,* e cioè tale che esistano degli intorni i quali non contengono mai punti equivalenti rispetto a G. Quindi per quanto riguarda il primo dei nostri problemi è naturale imporre la condizione che G sia propriamente discontinuo. La stessa condizione imporremo anche nel trattare il secondo problema quantunque non siano dimostrati teoremi così generali quanto quelli sopra citati: tuttavia a provare che essa non è estranea alla natura della questione è dimostrato in una nota in fondo al volume che anche pel secondo problema la condizione che G sia propriamente discontinuo è necessaria nel caso che si tratti di funzioni di una sola variabile.

Queste considerazioni ci dividono il compito in due parti: 1.° studiare i gruppi discontinui lineari in relazione alla loro propria discontinuità; 2.° studiare le funzioni automorfe. La seconda e terza parte del libro del Fubini riguardano rispettivamente la prima e la seconda questione.

Quando un gruppo è propriamente discontinuo? La risposta a questa domanda non si può ancora dare con tutta generalità. Tuttavia si dimostrano i seguenti due teoremi: un gruppo di trasformazioni lineari omogenee unimodulari, privo di trasformazioni infinitesime, che trasformi in sè un sistema continuo Σ di forme definite, induce in Σ un gruppo propriamente discontinuo; un gruppo, privo di trasformazioni infinitesime, di movimenti di una metrica reale è propriamente discontinuo. Applicando convenientemente questi teoremi si può studiare la propria discontinuità di una quantità di gruppi particolari, ricorderemo i gruppi aritmetici riproduttori di una forma, i gruppi fuchsiani, iperfuchsiani, kleiniani, i gruppi di movimenti in una metrica a curvatura costante od hermitiana, i gruppi di trasformazioni conformi di una metrica euclidea indefinita, ecc..

Se un gruppo è propriamente discontinuo esistono regioni che non contengono mai punti equivalenti: ma ci si può chiedere di costruire una regione tale che mai due punti di essa siano equivalenti, e che ogni punto sia equivalente ad un punto della regione; e cioè un *campo fondamentale* per il gruppo. Anche tale questione non comporta una risposta generale, tuttavia si possono consigliare diversi artifici, (come, ad esempio, l'ampliamento per riflessione) che sovente servono a condurre in fondo il problema; ed anche dare metodi che risolvono completamente, almeno dal punto di vista teorico, la questione per il caso dei gruppi di movimenti e per i gruppi

Digitized by Google

lineari considerati come operanti sul sistema delle forme definite algebriche od hermitiane di grado 2h di cui sopra si è rammentata la propria discontinuità. Particolarmente importante è quest'ultimo caso di fronte alla teoria generale dei gruppi projettivi e dei gruppi conformi. Preso un gruppo projettivo qualunque a coefficienti reali dello spazio S, lo si pensi come operante nello spazio Σ in cui si può rappresentare l'insieme delle quadriche inviluppo a coefficienti reali: sulla varietà W di questo spazio che rappresenta le quadriche degeneri spezzate in due stelle complesse coniugate, esso opera come sullo spazio S primitivo. Ora, per quanto precede, nella regione di Σ in cui sono rappresentate le forme definite, questo gruppo è propriamente discontinuo ed anzi ne sappiamo costruire un campo fondamentale. Se tale campo od il suo contorno conterrà una regione di W esso è propriamente discontinuo su W e quindi lo sarà pure il gruppo primitivo nello spazio S. Un analogo ragionamento vale pei gruppi projettivi a coefficienti complessi e pei gruppi conformi. È questa la generalizzazione del noto artificio del Poincaré per discutere la propria discontinuità dei gruppi kleiniani. Il criterio così ottenuto è sufficiente per la propria discontinuità di un gruppo; il Fubini non riesce a dimostrare che è necessario altro che nel caso dei gruppi kleiniani.

Dei gruppi kleiniani, ed in particolare dei gruppi fuchsiani e dei gruppi di movimenti e di similitudini del piano euclideo si occupa poi il Fubini, studiandone più profondamente i campi fondamentali ed i loro vertici, le reti di campi fondamentali, e le linee limiti di esse. In ispecial modo enumera i gruppi privi di trasformazioni infinitesime di movimenti nelle metriche euclidee ed ellittiche, i gruppi di similitudini euclidee, i gruppi fuchsiani corrispondenti a reti generate da triangoli o poligoni a lati circolari mediante inversioni per raggi vettori reciproci.

A completare questo studio su i gruppi discontinui l'A. tratta delle loro applicazioni aritmetiche alla teoria della riduzione delle forme.

Passiamo ora allo studio delle funzioni automorfe. Notiamo che sopra abbiamo parlato di funzioni di variabili complesse, poichè nessun preciso senso avrebbe avuto il problema quando si fosse trattato di funzioni di variabili reali: invero basterebbe allora assegnare arbitrariamente i valori nei punti di un campo fondamentale e definire la funzione nei residui punti col chiedere che in punti equivalenti esso abbia lo stesso valore. Ma tosto essa prende senso quando si voglia che la funzione soddisfi ad una equazione alle derivate parziali. Per esempio, si può chiedere di costruire una funzione armonica di due variabili u e v trasformata in sè dalle operazioni che su u e v induce un gruppo fuchsiano o kleiniano pro-

Digitized by Google

priamente discontinuo sulla variabile $x - u + i v$. E ciò riesce, come ha insegnato il Klein, quando il campo fondamentale del gruppo abbia un numero finito di lati, applicando un ragionamento affatto analogo a quello con cui si dimostrano i teoremi di esistenza su una superficie di Riemann.

Ma volgiamoci ai problemi posti da principio relativi alle funzioni automorfe di variabili complesse. Se consideriamo una funzione armonica come quella sopra costruita quale parte reale di una funzione di una variabile complessa, deduciamo subito un primo metodo di costruzione di funzioni automorfe di una sola variabile complessa. Costruite per un dato gruppo G due tali funzioni il Fubini mostra come il problema di costruire dei sistemi di funzioni zetaautomorfe rispetto a G e ad un gruppo lineare omogeneo Γ isomorfo a G, si può facilmente ridurre al problema di inversione di Riemann, problema che è stato di recente risoluto con i semplici mezzi delle equazioni integrali dallo Hilbert.

Ma il metodo del Klein oltre a supporre che il campo fondamentale sia ad un numero finito di lati, è nella sua applicazione limitato dall'ipotesi che si tratti di funzioni di una sola variabile. Ben più potente è il metodo algoritmico fornito dalle serie *teta* del Poincaré. La questione più difficile che si incontra in questo indirizzo è quello della convergenza delle serie medesime: l'A. espone due teoremi che dànno estese condizioni di convergenza per i gruppi di movimenti e per i gruppi lineari. Completano la parte generale relativa alla dimostrazione dei teoremi di esistenza delle funzioni automorfe e zetaautomorfe brevi richiami al caso dei gruppi discontinui finiti ed alle equazioni algebriche ad essi collegate, ed alla teoria delle funzioni 2n volte periodiche; questi ultimi sono specialmente importanti in quanto ci mostrano chiaramente come i metodi di Klein e Poincaré siano ancora lontani dal bastare a dimostrare il teorema di esistenza delle funzioni automorfe con quella generalità che il problema stesso comporta.

Le funzioni automorfe — ed in particolare quelle corrispondenti ai gruppi fuchsiani e kleiniani che per brevità si dicono funzioni fuchsiane e kleiniane — godono di proprietà molto notevoli. Ricordiamo specialmente i teoremi che — l'A. volle chiamare di Weierstrass, perchè il Weierstrass primo li dimostrò per le funzioni 2n volte periodiche — secondo cui delle funzioni automorfe rispetto ad un gruppo G, il cui campo fondamentale soddisfaccia ad alcune proprietà che non mette qui conto di enunciare più precisamente, $n + 1$ qualunque sono legate da una relazione algebrica, e tutte si esprimono razionalmente per $n + 1$ convenienti di esse. In particolare le funzioni fuchsiane e kleiniane corrispondenti ad uno stesso gruppo sono funzioni algebriche di una di esse. E qui compare la nota rappresentazione del poligono fondamentale di un gruppo kleiniano o fuch-

Digitized by Google

siano su di una superficie di Riemann, e importanti considerazioni relative alle relazioni algebriche che possono legare due funzioni fuchsiane o kleiniane corrispondenti a due gruppi diversi, ed il famoso teorema di diramazione del Klein.

L'ultimo capitolo è dedicato alla principale applicazione della teoria delle funzioni automorfe: vogliamo dire all'uniformizzazione delle funzioni polidrome. L'A. utilizza ed espone in forma breve e sistematica i recentissimi studii del Koebe che, seguendo un'idea del Poincaré, ha dimostrato con pieno rigore e generalità la possibilità dell'uniformizzazione mediante funzioni fuchsiane.

Chiude il volume un'appendice sulle funzioni modulari ed ipermodulari considerate in quanto esse costituiscono una importante classe di funzioni cremoniane.

EUGENIO ELIA LEVI

Analisi infinitesimale

G. PAGLIERO. — *Applicationes de calculo infinitesimale.* Torino, G. B. Paravia, 1907, 8° gr. p. 214. [Prezzo L. 7].

La lingua nella quale è scritto il presente volume (il *latino sine flexione),* le formole di logica matematica che vi si incontrano e l'uso frequente del calcolo geometrico di Grasmann indicano subito quale sia la scuola matematica a cui appartiene l'A. Ed infatti in tale volume trovansi compendiate le lezioni fatte dal D.r Pagliero ad illustrazione di quelle del Prof. Peano, di cui egli è assisstente. Gli argomenti svolti sono i seguenti:

Geometria. Costruzione di vettori; baricentri di punti; prodotto interno di vettori; coordinate di punti e di vettori.

Limiti. Serie; binomio di Newton; numero *e;* logaritmi; funzioni trigonometriche.

Calcolo differenziale. Formole di derivazione; massimi e minimi; teorema di de l'Hospital; derivate d'ordine superiore: interpolazione di primo grado; teorema di Lagrange; derivate parziali; applicazione alle curve piane.

Calcolo integrale. Formole d'integrazione.

L'esposizione è improntata al massimo rigore ed i calcoli sono condotti con semplicità ed eleganza; gli esempi svolti furono scelti in modo da interessare ed istruire Per ciò il libro del D.r Pagliero va caldamente raccomandato agli studenti delle nostre Università, i quali (giova rilevarlo espressamente) non incontreranno alcuna difficoltà ad intendere una lingua avente con la nostra una somiglianza così grande da divenire spesso identità. G. L.

Digitized by Google

SAMPACHI FUKUZAWA. — *Vier mathematische Abhandlungen.* — Tokio, Jijishimposha, 1907. 8° p. VI+61+(1).

Siamo lieti di annunciare questo opuscolo, dovuto ad un figlio di quel popolo, che negli ultimi anni ha sviluppato tante latenti energie, e che s'avvia a gran passi a prendere un posto onorevole fra le nazioni più incivilite. È il lavoro di un esordiente, che, se per sè stesso non ha grande valore nè è scevro da mende, può accettarsi come una promessa per l'avvenire.

Nella prima delle quattro memorie di cui sconta l'opuscolo, l'autore rappresenta una funzione complessa di una variabile reale x:

$$y + i\,z = f(x) = \varphi(x) + i\,\psi(x)$$

mediante una curva nello spazio di coordinate x, y, z. Dei risultati a cui egli giunge, alcuni appaiono inesatti o incomprensibili, perchè egli, non sappiamo per qual motivo, trascura di distinguere nella scrittura una quantità complessa dal suo modulo. — La seconda memoria stabilisce la serie di Taylor nel caso in cui la variabile è il prodotto d'una variabile reale per una costante complessa; le diciotto pagine assorbite da quest'argomento avrebbero potuto ben facilmente ridursi ad assai meno. — La terza memoria è dedicata ad un'espressione analitica che ha valori diversi all'interno ed all'esterno d'un certo cerchio, e che comprende come caso particolare quella ben nota di J. Tannery. — Finalmente ella quarta memoria l'autore dimostra che, se a, c sono numeri dispari positivi, b una costante positiva minore di 1, e se:

$$ab > 1 + \frac{3}{2}\,c\,\pi,$$

la funzione:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\cos a^n x\,\pi \right)^c,$$

che per $c = 1$ si riduce a quella di Weierstrass, non ammette la derivata per alcun valore di x. G. VIVANTI

SAMPACHI FUKUZAWA. — *Klassifikation der Unstetigkeiten von Funktionen einer reellen Veränderlichen.* — Tokio, Jijishimposha, 1907. 4° p. II+41 e 2 tav.

Il giovane matematico giapponese tenta una classificazione delle discontinuità delle funzioni d'una variabile reale basata sul modo di comportarsi delle differenze:

Digitized by Google

$$f(a+\varepsilon) - f(a-\delta),$$

dove a è il punto di discontinuità ed ε, δ sono due infinitesimi indipendenti l'uno dall'altro. La sua esposizione è accompagnata da numerosi esempi, alcuni dei quali vengono anche studiati dal punto di vista geometrico.

G. VIVANTI

Poliedri

M. BRÜCHNER. — *Ueber die gleicheckig-gleichflächigen, diskontinuirlichen und nichtkonvexen Polyeder.* Mit 29 Tafeln. Halle 1906. (Estratto dal Vol. LXXXVI delle Abh. der Kais. Leop. Carol. Deutschen Akad. der Naturforscher).

I poliedri equiangoli ed equiedrici (cioè i poliedri di cui gli angoli solidi sono fra loro eguali o simmetrici e di cui le facce si trovano nelle medesime condizioni) sono evidentemente una vasta generalizzaziene degli ordinari poliedri regolari. Facendo le ipotesi che: 1° le facce siano tutti poligoni convessi, 2° che l'intera superficie del poliedro formi un tutto continuo, 3° che gli angoli delle facce siano tutti inferiori ad un angolo piatto, si ottengono in totale nove poliedri, otto dei quali furono scoperti ed accuratamente investigati da E. Hess sino dal 1876. Togliendo le limitazioni superiormente enumerate si ottengono da un lato dei poliedri non-convessi, dall'altro dei poliedri non-continui; sopra gli uni e gli altri l'Hess nel 1901 attrasse l'attenzione dell'A., che i nostri lettori ben conoscono come uno specialista nella teoria dei poliedri (cfr. *Bollettino.* T. IV, 1901, p. 74), ed egli, accogliendo l'invito ricevuto, istituì delle ricerche i cui risultati furono enunciati in una breve comunicazione fatta nel 1904 al Congresso internazionale dei Matematici di Heidelberg e che trovansi completamente stabilita nella monumentale (p. 345 in 4°) memoria che annunciamo; la quale stimiamo chiamata ad occupare un posto notevole nella letteratura dell'argomento, vuoi che la teoria dei poliedri sia destinata a proseguire nel cammino che attulamente percorre, vuoi che la sorte la chiami a battere altre vie per raggiungere nuovi porti.

La memoria del Prof. Brückner comprende quattro lunghi capitoli. Nel I dei quali (intitolato *Parte generale)* dopo alcune osservazioni atte a fungere da ponte fra la sua opera *Vielecke und Vielfläche* (v. *Bollettino* l. c.) e lo scritto attuale, l'A. osserva che i poliedri cercati si trovano, se così possiamo esprimerci, nell'intersezione delle due categorie di figure costituite l'una dai poliedri equiangoli, l'altra dai poliedri equiedri; basandosi sui risultati di

Digitized by Google

precedenti ricerche di Hessel e di Hess ne deduce che tutti sono inscrittibili e circoscrittibili alla sfera. La ricerca dei poliedri equiedri fu dall'Hess ridotta alla divisione di una sfera in poligoni fra loro eguali; mediante polarità i poliedri equiangoli se ne derivano L'A. propone per eseguire quella propostasi alcune costruzioni che sono generalizzazioni di quelle che Poinsot e Cauchy suggerirono pei poliedri regolari di specie superiore; delle figure a cui perviene egli dà una classificazione che può compendiarsi nel seguente quadro:

- I. Pol. conv. (bilateri)
  - *A.* Pol. cont.
    - *a.* Poliedri regolari
      - α. Pol. reg. convessi
      - β. Pol. reg. stellati
    - *b.* Poliedri irregolari
      - α. Pol. di I specie
      - β. Pol. di Hess
  - *B.* Pol disc.
    - *a.* Poliedri regolari
      - α. Stella octangola di Keplero
      - β. Insieme di 5 tetr.
      - γ. Insieme di 10 »
    - *b.* Poliedri irregolari
      - α.
      - β.
      - γ.
- II. Pol. non convessi
  - *A.* Bilateri
    - *a.* Pol. non conv. di I sp.
      - α. Pol. continui
      - β. Pol. discontinui
    - *b.* Pol. non conv. di II. cl.
      - α. Pol. cont. di contenuto nullo
      - β. Pol. disc. di con tenuto nullo
  - *B.* Unilaterali

Tutte queste figure si trovano accuratamente descritte ed investigate negli altri tre Capitoli della memoria di cui trattasi, applicando sia semplici considerazioni dirette, sia gli elementi della trigonometria e della geometria cartesiana; i risultati conseguiti non possono venire compendiati, onde siamo costretti a rimandare al

Digitized by Google

lavoro originale il lettore desideroso di più minuti ragguagli. Osserviamo soltanto che nelle ultime nove tavole si trovarono riprodotti in fototipia 110 modelli costruiti dall'A. delle figure da lui scoperte; sono quei modelli che ricorderanno, per averli ammirati quelli fra i nostri lettori che visitarono l'Esposizione annessa al III Congresso internazionale di matematici; gli altri, col mezzo delle riproduzioni di cui è parola, potranno agevolmente figurarseli e dalla loro complicazione trarre argomento di alta stima per chi seppe concepirli.

G. L.

Filosofia della matematica

E. Vecchietti. — *L'infinito. Saggio di psicologia della matematica.* Soc. ed. Dante Alighieri, 1908, 8°, pag. XV+181.

Il sig. Vecchietti ha voluto, con giovanile baldanza, affrontare uno dei problemi più irti di difficoltà della filosofia matematica, quello dell'infinito; ed è tanto più lodevole il suo coraggio, perchè la profonda separazione che purtroppo esiste ancora in Italia tra matematici e filosofi non permette di troppo sperare (come noi ci auguriamo) in una lieta accoglienza nè da parte degli uni nè da quella degli altri.

Egli si è proposto un duplice scopo: analizzare la nozione di infinito matematico, e mostrare che la matematica non può fare a meno di tale nozione. A tal uopo egli comincia con l'esaminare da che cosa abbia origine nella nostra mente la nozione d'infinito, e trova che ad essa non corrisponde un *concetto,* ma soltanto il *sentimento* della possibilità di ripetere indefinitamente un'operazione; questo sentimento viene tradotto dal matematico in un *simbolo,* il quale per noi non ha un contenuto logico, ma l'avrebbe per un pensiero per il quale fosse finito il nostro infinitamente grande. Allo stesso modo l'infinitamente piccolo « corrisponde alla posizione simbolica di un pensiero il quale veda esaurirsi una nostra operazione dividente » (§ 10). Di qui si deduce facilmente, per la stretta connessione che v'ha fra la nozione d'infinitesimo e quella di continuo matematico, che anche quest'ultima è simbolica.

Stabilito questo, l'A. prende ad esaminare i vari metodi con i quali furono trattati i problemi che oggidì costituiscono il Calcolo infinitesimale, dai tempi più antichi sino a Carnot e a Cauchy, e trova che tutti si fondano, più o meno esplicitamente, sulla nozione dell'infinitesimo, la quale però è in essi « intuitiva, non logica ». La

Digitized by Google

stessa nozione rintraccia in tutte le teorie dei numeri irrazionali e nelle varie definizioni di limite. E finisce con alcune considerazioni sulla teoria dei numeri trasfiniti e sulla discussione sollevata da G. Cantor intorno all'esistenza di segmenti infinitesimi.

A nostro avviso, la prima tesi dell'Autore, che cioè l'infinito matematico non è un concetto, è perfettamente giusta; e noi pure l'abbiamo sostenuta in uno scritto recente.

Quanto alla seconda tesi, che cioè il Calcolo infinitesimale ha bisogno della nozione di infinito, essa è in apparente contraddizione con ciò che si suol asserire, da Cauchy in poi, che questa scienza può svolgersi senza uscire dal campo delle quantità finite; ma tutto si riduce ad una questione di parole. È indubitato che, se non avessimo il *sentimento dell'infinito,* cioè il sentimento della ripetibilità indefinita di una operazione, non potrebbe esistere nè la teoria dei limiti e dei numeri irrazionali, nè il Calcolo infinitesimale; ma ciò che interessa il matematico è questo, che tali discipline possono svolgersi senza far uso del *simbolo* che rappresenta quel sentimento; ed è chiaro che le due asserzioni non sono incompatibili. E del resto, tolto il sentimento dell'infinito, cadrebbe, non solo il Calcolo infinitesimale, ma tutta la matematica, a cominciare dalle sue basi, la linea retta e la serie naturale dei numeri; sicchè la tesi che discutiamo ha molto maggiore ampiezza di quella che le attribuisce l'Autore, e proporzionatamente minore interesse.

Quest'ultima osservazione include implicitamente un appunto che vorremmo fare al lavoro del sig. Vecchietti, il quale, colla esuberanza che è propria della sua età, vi ha accumulato molte cose che, non essendo strettamente necessarie allo scopo, turbano la chiara visione dell'assieme. Forse per lo stesso fortunato difetto il Vecchietti, il quale in generale ragiona del tutto correttamente, si lascia in qualche punto trasportare a conclusioni un po' affrettate. Per esempio egli (§ 10), dopo avere stabilito che l'infinitamente grande è un simbolo, ne deduce subito che è un simbolo anche l'infinitamente piccolo, e ciò è giusto; ma non s'accorge che il simbolo, nel suo senso, dell'infinitamente piccolo è, senz'altro, lo zero, e s'impelaga in discussioni le quali, secondo noi, non hanno alcun significato, e di cui si risente l'eco anche in altri punti del libro. Pure i paragrafi 68, 69, 83, 86 presentano alcune imperfezioni, che sarebbe troppo lungo mettere qui in luce, ma di cui l'Autore stesso potrà ben facilmente rendersi conto. Infine vorremmo consigliare all'Autore, che è senza dubbio fornito di buona coltura sì matematica che filosofica, di non prendere la letteratura di seconda mano, ma di ricorrere direttamente alle fonti; vi spenderà maggior tempo e maggior fatica, ma nè l'uno nè l'altra saranno sciupati. La lettura delle opere dei grandi passati è altamente istruttiva, e nulla v'ha che la sostituisca, giacchè ognuno che ricorra a quelle opere vi trova cose interessanti

Digitized by Google

che ad altri prima di lui erano sfuggite. Anche i loro errori sono per noi una scuola; quante pagine inutili sull'infinito si risparmierebbero, se tutti leggessero quell'elegantissima collezione di assurdità che è la *Géométrie de l'infini* di Fontenelle!

Ma non dobbiamo dimenticare che il nostro Autore è alle sue prime armi, e riconosciamo con piacere che il suo lavoro è una lieta promessa per l'avvenire.

G. VIVANTI

Strumenti

P. ROZÉ. - *Théorie et usage de la règle à calculs (Règle des écoles — Regle Mannheim).* 8°, p. 148 con 85 figure ed una Tavola litogr. Paris, Gauthiers-Villars, 1907. [Prezzo fr. 3,50].

Il titolo di questa pubblicazione ne indica chiaramente il contenuto e lo scopo e dà a divedere l'analogia di essa con una ben nota dovuta alla penna di Quintino Sella. L'A. non suppone nel lettore che i primi rudimenti dell'algebra, onde comincia dallo stabilire le proprietà delle progressioni e dei logaritmi, su cui appunto riposa tutta la teoria dei regoli calcolatori. Dei principali fra questi egli fa conoscere la disposizione e l'uso, esponendone molteplici ed interessanti applicazioni, tratte, non soltanto dall'Algebra e dalla Geometria, ma anche dall'Astronomia, dalla Meccanica e dalla Fisica. Tale essendo il contenuto dell'opuscolo che annunciamo sembra, a prima giunta, che esso sia destinato esclusivamente a coloro che si occupano di applicazioni pratiche delle matematiche; tuttavia noi caldamente ne raccomandiamo la lettura ai professori di algebra delle nostre scuole medie, perchè da esso trarranno uno dei mezzi che si possono efficacemente adoperare per ravvivare con applicazioni interessanti l'insegnamento puramente dottrinale delle scienze esatte e per stabilire quell'intimo legame fra teoria ed applicazioni, oggidì tanto vivamente e generalmente raccomandato dai più insigni pedagogisti.

G. L.

Rassegna delle Dissertazioni di laurea recenti [1]

A. MORGENSTERN. *Beiträge zur numerischen Lösung der Gleichungen fünften Grades* (Diss. Halle a. S., 1907). — Questo lavoro ha per iscopo di misurare l'applicabilità pratica dei metodi di riso-

(1) Nell'inaugurare questa nuova rubrica invochiamo, per proseguirla, l'aiuto di tutti coloro che sono in grado di procurarci i materiali necessari.

Digitized by Google

luzione delle equazioni di 5° grado proposti da Hermite, Brioschi, Kiepert e Klein-Gordan, cioè di decidere se le formole date da questi autori si prestino al calcolo effettivo delle radici delle equazioni di detto grado. Nel corso delle sue ricerche l'A. ha fra l'altro, determinato un segno incerto che si trova nelle formole di Kiepert ed ha notato che le formole di Klein contengono un'indeterminazione che, a suo avviso [1], le rende inapplicabili in pratica; perciò gli sforzi fatti dall'A. per render pratici certi risultati teorici lo hanno guidato a conseguenze dottrinali di considerevole importanza.

H. RIEDER. *Untersuchung einer 2-4-deutigen kinetographischen Verwandschaft* (Diss. München, 1907). — Cinematica nei mezzi, questa memoria è geometrica nei fini, chè essa insegna a studiare e delineare molte curve piane notevoli, per lo più già note, ma che qui appajono in nuova luce.

H. STAROTZIK. — *Ueber eine von Steiner gefundene, noch wenig beachtete Eigenschaft der Leitstrahlen der Kegelschnitte und über Kurven, die mit den einen Kegelschnitt doppelt berührenden Kreisen zusammenhängen* (Diss. Breslau, 1907). — Ecco un lavoro che interesserà coloro che vogliono essere aiutati a sciogliere i numerosi enigmi che racchiudono le « Opere » di Steiner; chè ivi sono dimostrate le proposizioni enunciate dal sommo geometra negli scritti che, nel secondo volume delle *Gesammelte Werke*, occupano le pagine 351-4, 389-420, 710-4.

E. WEISSE. *Anwendung der elliptischen Funkionen auf ein Problem aus der Theorie der Gelenkmechanismen* (Diss. Rostock; Dresden 1907). - L'applicabilità delle funzioni ellittiche allo studio dei sistemi articolati fu messa in luce dal Darboux, dal Picciati e più recentemente dal Krause; gli è specialmente dalle ricerche di quest'ultimo che l'A. ha prese le mosse ed ha portato così un notevole contributo agli studi di cinematica teorica che con tanto impegno si fanno in Germania sotto l'impulso di L. Burmester, R. Müller, ecc., nonchè alla teoria di speciali curve piane notevoli.

E. KOESTLIN. *Ueber eine Deutung der Gleichung, die zwischen dem Bogen und dem Neigungswinkel der Tangente im Endpunkte des Bogens einer ebenen Kurve besteht* (Diss. Tübingen; Borna-Leipzig, 1907). Gli elementi usati dall'A. per rappresentare una curva sono indipendenti dagli assi di riferimento, onde le considerazioni svolte appartengono alla Geometria intrinseca; gli sviluppi e le

(1) Cfr. l'autodifesa del Klein nel T. I, p. 306 dell'opera *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus* (Leipzig, 1908).

Digitized by Google

applicazioni esposte dall'A. porgono altrettante riprove di quanto utile sia il proposto metodo di geometria analitica.

EMMY NOETHER. *Ueber die Bildung des Formensystems der ternären biquadratische Form* (Diss. Erlangen, 1907). — È un notevole contributo alla determinazione delle forme invariantive di una forma ternaria biquadratica; eseguito sotto la direzione del Gordan ne completa alcuni lavori; inoltre prosegue e corregge alcuni ben noti risultati ottenuti dal Maisano e dal Pascal.

OTTO BOLDUAN. *Zur Theorie der übergeschlossenen Gelenkmechanismen* (Diss. Halle a. S., 1908). — Altre applicazioni cinematiche della teoria delle funzioni ellittiche (cfr. la succittata Diss. del Weisse).

R. NEUENDORFF. *Ueber Kreispunktpolarkurven* (Diss. Kiel, 1908). — Rispetto all'indicatrice in un punto qualunque d'una superficie si possono considerare le polari dei punti ciclici del relativo piano tangente; vengono così determinate due notevoli direzioni in un punto qualunque della superficie e quindi, con una notissima considerazione, un doppio sistema di linee della superficie stessa: sono appunto quelle studiate in questa Diss.; esse si possono anche definire come le curve aventi per immagini sferiche le rette della sfera rappresentatrice.

M. ROEGNER. *Die Steinersche Hypocykloide* (Diss. Jena, 1908). — È un'esposizione metodica e diligentemente documentata delle proprietà dell'ipocicloide tricuspide, che riuscirà utilissima a tutti coloro che vogliono orientarsi in un tema che diede origine a tante svariate ricerche; in appendice trovasi riprodotta la celebre memoria di Steiner sull'argomento, accompagnata da una bella figura illustrativa.

H. BRANDES. *Ueber die axiomatische Einfacheit mit besonderer Berücksichtigung der auf Addition beruhenden Zerlegungsbeweise der Pythagoräischee Lehrsatzes* (Diss. Halle, 1908). P. MAHLO. *Topologische Untersuchungen über Zerlegung in ebene un sphärische Polygone* (Diss. Halle, 1908).

Questo lavoro, al pari del precedente, è ispirato alle idee esposte dal Prof. Bernstein nella comunicazione fatta alla IV Sezione del IV Congresso dei matematici; l'uno e l'altro avendo per oggetto lo studio ed il paragone delle varie dimostrazioni del teorema di Pitagora; siamo in presenza di una trasfigurazione della *Geometrografia* di E. Lemoine.

ELISABETH BUCHANAN COWLEY. *Plane curves of the eight order with two real four-fold points having distinct tangents and with*

Digitized by Google

no other point singularities (Diss. Univers. Columbia, 1908). — Ricerche topologiche intorno alle curve di ottavo ordine con due punti quadrupli; l'autrice, dopo avere enumerate a priori le forme che esse possono assumere, ne dimostra l'effettiva esistenza e così perviene ad una classificazione delle stesse; da ultimo espone le relazioni che passano fra le curve in questione ed altre a doppia curvatura.

K. SCHMIDT. *Untersuchungen über Kurven dritter Ordnung im Anschluss an eine Grassmann'sche Erzugungsweise* (Diss. Giessen, 1908). — Questo lavoro, mentre da un lato dimostra che le idee ed i metodi di Grassmann sono stimati e coltivati nella patria di quel grande, d'altro lato, come tutti i lavori di commento e di applicazione, agevolerà l'intelligenza di quelle idee e di quei metodi; cosa di cui si deve rallegrarsi perchè gli scritti di Grassmann sopra la generazione delle curve e delle superficie offrono ancora un campo di ricerche ubertosissimo che è da augurarsi trovi attivi cultori.

R. SCHMIDT. *Ueber zweite Polarflachen einen allgemeine Flache 4. Ordung.* (Diss. Breslau, 1908). — Lavoro di geometria numerativa sintetica, il cui tema è chiaramente indicato dal titolo. Eseguito per consiglio e sotto la direzione del Prof. Sturm, dà notizia d'una critica acuta da questi fatta alle ricerche di Cremona sopra i « complessi simmetrici » di superficie e dà l'annuncio di una prossima memoria di quello scienziato destinata a correggere le relative proposizioni.

A. JOPKE. *Synthetische Untersuchungen über lineare Kegelschnittsystem erster, zweiter und dritter Stufe* (Diss. Breslau, 1908). — Altro lavoro prettamente geometrico fatto sotto la direzione del Prof. Sturm; eccone il contenuto: I. Fasci semplicemente, doppiamente e triplicemente specializzati contenuti in una rete di coniche. II. Speciali reti di coniche, in particolare le reti semplicemente, doppiamente o triplicemente specializzate. III. Una polarità esistente in un sistema lineare di coniche dotato di due punti base. IV. Corrispondenza projettiva tra i sistemi lineari di coniche di 2ª e 3ª specie ed il piano o lo spazio punteggiati.

J. VAN UVEN. *Conforme Afbeelding door Stralencongruenties* (Diss. Utrecht, 1909) Data una funzione complessa w^1 di una variabile complessa w, l'A. suppone che i piani rappresentivi di queste due variabili siano fra le loro paralleli e studia la congruenza costituita delle rette che congiungono le coppie di punti che si corrispondono nei due piani. Uno studio particolare viene da lui fatto nei tre casi seguenti: $w\ w^1 = 1$, $w^1 = w^2$, $w^1 = w^m$. Memoria di 140 pagine in 4°, illustrato da 31 figure nel testo.

Digitized by Google

A. WERNER. *Ueber Systeme von drei Pfaffschen Gleichengen im Raume von fünf Dimensionen* (Diss. Greifswald, 1908). — Lavoro fatto sotto la direzione del Prof. Engel e collegato alla memoria di questo geometra « Eine neue Methode in der Invariantentheorie der Differentialgleichungen », Leipzig. Ber. 1905.

G L.

Geometria elementare

F. ENRIQUES e U. AMALDI. — *Elementi di geometria ad uso delle scuole secondarie superiori.* Bologna, Zanichelli, 3.ª edizione. 8°, pag. 599 [Prezzo L. 4,50].

Non è il caso di entrare, dopo le recensioni delle precedenti edizioni, da altri pubblicate, in un esame minuto della struttura del libro. Sarà bene piuttosto esaminare questa edizione dal punto di vista delle innovazioni introdotte e dei miglioramenti che erano da attendersi.

Notiamo subito che non vi sono infrequenti le semplici affermazioni. A pag. 280, per esempio, gli Autori affermano senz'altro che se i lati di un triangolo si dividono in m parti eguali, le congiungenti dei punti di divisione dividono il triangolo in m_2 parti eguali; ora che queste parti siano in numero di m^2 non parmi cosa tanto evidente da potersi affermare senz'altro. A pag. 462 (cor. 721) si afferma che una retta parallela a due piani è parallela alla loro intersezione senza ricorrere al teorema del n. 710, per mezzo del quale si esclude che le rette siano sghembe. Nè vi sono rari gli errori di stampa. Per esempio, a pag. 310, linea sesta, si deve leggere n $\hat{CAB}$ > 2 retti e non 4 retti; a pagina 468, cor. 735, bisogna supporre che i tetraedri abbiano le basi e le altezze eguali, e non le sole basi; a pagina 470, nella dimostrazione del primo teorema sui triangoli omotetici bisogna concludere, secondo me, richiamando il cor. del n. 702 invece del n. 704, che tutte e tre le rette AA', BB', CC' sono parallele fra loro; a pagina 523 nel postulato bisogna leggere prevalente in luogo di equivalente, ecc., ecc.

In un volume di circa 600 pagine le mende non andrebbero rilevate, ma siccome si tratta di una terza edizione che ripete gli stessi errori, abbiamo creduto opportuno di notarne alcuni nell'interesse della scuola.

Come fu già osservato (F. Palatini, *Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematica,* Luglio-Agosto-Settembre 1903), dando uno sguardo generale all'opera per la parte scientifica, resta

Digitized by Google

solo la teoria dell'equivalenza come la più originale. In seguito all'aggiunta del postulato 386 e del cor. 389 resta eliminata la critica fatta dal Palatini. Ma quanto poi al ***non indugiarsi*** (pag. 207) gli Autori sulla dimostrazione dei corollari 389-90-91 non mi pare un buon metodo: sarà il professore che nella sua classe per speciali motivi potrà omettere certe dimostrazioni, ma il testo le deve contenere quando le proposizioni, sotto forma di teoremi o corollari, non siano ovvie conseguenze delle nozioni precedenti. Così nel n. 803 della pag. 502 è enunciata la seguente proposizione della quale si fa poi uso frequente: « Dato un solido, si può sempre costruire un tetaedro (o un poliedro a faccie piane o una sfera) che sia tutto contenuto in esso. » Ma, se non si assume questa « cosa evidente all'intuizione », come scrivono gli Autori, come postulato, occorrerebbe dimostrarla. Altrimenti perchè poi indugiarsi nella dimostrazione di altre proprietà, pure intuitivamente evidenti, soltanto per il fatto che la dimostrazione è semplice? Anzi, se mai, dovrebbesi fare il contrario. Comunque però, proposizioni di tal fatta che, pur essendo evidenti all'intuizione, avrebbero bisogno di una dimostrazione piuttosto laboriosa, e che perciò per ragioni didattiche si tralascia, perchè non darle sotto forma di postulati, come nel testo si fa per altre proprietà di simile natura?

Esaminiamo ora, dal punto di vista didattico, qualche singola parte del volume e cominciamo dalla ***retta,*** ente primitivo definito per mezzo di un postulato nel quale si parla di ***ordini naturali*** senza spiegarne il significato. Ma l'***ordine naturale,*** perchè abbia senso preciso, deve essere, come è noto, regolato da due condizioni. Uno degli Autori del libro in esame, il chiarissimo prof. Amaldi, in un articolo dei *Collectanea* di Enriques, pag. 52, riferendosi alla generazione intuitiva della retta per mezzo di un punto mobile, ***postula*** in maniera precisa le proprietà inerenti agli ordini naturali secondo i quali vengono disposti i punti della retta. Perchè non farlo dunque nel trattato di geometria? E perchè enunciare delle proposizioni senza titolo, come quella relativa alla retta del n. 15, pag. 9, che in sostanza è un corollario del postulato?

Ma andiamo innanzi. L'eguaglianza tra segmenti (e tra angoli) è assunta come primitiva alla maniera di Hilbert. Però i postulati che l'accompagnano non mi sembrano soddisfacenti come, per esempio, quegli altri esposti con ordine e con chiarezza dal Guarducci, nell'articolo dei citati *Collectanea* « Della congruenza e del movimento » (pag. 74). E non trovo didatticamente efficace il N. 30 che qui trascrivo:

« Teor. — La somma di più segmenti gode della proprietà associativa e commutativa, cioè

$$AB + CD + EF + \ldots = AB + (CD + EF) + \ldots$$

e

$$AB + CD + EF + \ldots = CD + (AB + EF + \ldots) \text{ ecc. } »$$

Digitized by Google

(I punti e l'ecc. sono degli Autori: io non ho aggiunto nè tolto nulla).

Ed ora lasciamo i principii e veniamo ad una teoria sulla misura che stabilisce « su basi geometriche la teoria dei numeri irrazionali » (cfr. la Prefazione). Consideriamola, per brevità, nel caso dei segmenti. Posta la definizione di proporzionalità tra quattro segmenti a, b, c, d mediante gli equimultipli, posta altresì la definizione di rapporto tra due segmenti h e k (indicato con h : k), si dimostra facilmente che se i segmenti suddetti sono in proporzione sarà il rapporto a : b eguale all'altro c : d. Misuriamo i quattro segmenti mediante un segmento *u*, cioè calcoliamo i rapporti di essi ad *u* e si abbia

$$a : u = \alpha,\ b : u = \beta,\ c : u = \gamma,\ d : u = \delta.$$

Chiamando allora *quoziente* $\frac{\alpha}{\beta}$ dei numeri α e β il rapporto dei segmenti *a* e *b* e analogamente *quoziente* $\frac{\gamma}{\delta}$ il rapporto di *c* a *d*, segue che questi quozienti sono eguali, essendo a : b eguale a c : d e quindi si conclude: « Se quattro segmenti sono in proporzione, anche le loro misure rispetto ad una qualsiasi unità sono proporzionali; e viceversa » (pag. 346).

Ora si domanda: poichè le quattro misure sono quattro numeri, si deve intendere che questi numeri siano proporzionali nel comune senso aritmetico? E, nel caso affermativo, come mai può ritenersi sufficiente per la proporzionalità l'eguaglianza tra quozienti *definiti come rapporti di segmenti* senza aggiungere altro? E, nel caso negativo, volendo cioè istituire una teoria « indipendente dallo sviluppo del programma di Algebra », secondo il proposito degli Autori, non occorre però la definizione di proporzionalità tra quattro numeri?

Termino il mio articoletto osservando che nel libro in discorso manca quella distinzione, tanto opportunamente fatta dal Veronese, tra i postulati necessari e quelli dati per esigenze didattiche, cosicchè il lettore non può comprendere sopra quale sistema di postulati essenziali gli Autori intendano fondare il loro edificio. E noto infine che nel libro in esame, *ad uso delle scuole secondarie superiori,* manca il calcolo di π e non è dato sufficiente sviluppo alla costruzione geometrica di espressioni algebriche.

VINCENZO AMATO

Digitized by Google

Geometria analitica

O HESSE. — *Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie, des Punktes und des Kreises in der Ebene.* IV Aufl. revidiert und ergänzt von S. GUNDELFINGER. Leipzig, Teubner, 1906. 8.°, p. VIII+251 [Prezzo del vol. leg. Mk. 8].

Questo aureo volumetto è troppo noto a tutti i matematici perchè noi reputiamo necessario esporne il contenuto e tesserne l'elogio. Scritto da un maestro di stile matematico, dal 1865 esso serve come modello del modo in cui l'algebra odierna abilita a risolvere, senza grande apparato di calcolo e con perfetta eleganza, le più complicate questioni della geometria piana elementare. L'essersi manifestato il bisogno di una nuova edizione prova che si ritiene esser esso capace di esercitare ancora una benefica influenza; quante opere, dopo quarant'anni di vita, possono vantare un giudizio congenere?

G. L.

FRANCESCO CALDARERA. — *Primi fondamenti della geometria del piano.* — Palermo-Torino, Carlo Clausen, 1891, p. VIII+188. — *Primi fondamenti della geometria dello spazio.* — Palermo, Stab. tip. Virzì, 1908, p. IV+236 [Prezzo L. 5,— + 7,—].

Alcuni problemi di geometria analitica del piano o dello spazio, vengono trattati in modo elegante con formole simmetriche, quando si adotta il sistema delle coordinate trilineari per la geometria piana, quadrilineari per quella dello spazio. Tali sistemi di coordinate si presentano pure assai utili in varii problemi di meccanica e specialmente di statica. Uno dei migliori trattati di geometria analitica basato sopra questi concetti è il presente del Prof. Francesco Caldarera. Esso è diviso in due volumi. Nel primo l'A. si occupa della geometria piana, nel secondo di quella dello spazio, svolgendo sia la geometria analitica metrica, sia quella analitico-proiettiva.

Nel primo volume l'A. studia anzitutto gli enti lineari della geometria piana e le proiettività. Generalizza il concetto delle proprietà armoniche, seguendo in parte la classica Memoria del Cremona sulle curve piane; così stabilisce una teoria analitica dei centri armonici con qualche cenno sulle involuzioni di ordine qualunque. L'A. si occupa poi delle collineazioni e correlazioni tra due piani; fa un cenno della teoria dei poli e delle polari rispetto a curve di ordine qualunque e di quelle delle figure polari reciproche, e finalmente risolve interessanti problemi di geometria analitica per il

Digitized by Google

cerchio; fra questi merita speciale menzione quello del cerchio tangente a tre dati.

Nel secondo volume sulla geometria dello spazio vi è anzitutto (cap. I) lo studio analitico dei punti, delle rette e dei piani rispetto al tetraedro fondamentale delle coordinate. Nel capitolo II l'A. tratta delle forme fondamentali di 1.ª, 2.ª e 3.ª specie e delle loro proprietà proiettive; studia anche il problema delle sfere tangenti a quattro sfere date con minore ampiezza però di quella relativa all'analogo problema di geometria piana.

La prima parte del capitolo III si riferisce alle proprietà generali delle linee e delle superficie algebriche ed in particolar modo delle rigate, dei coni, cilindri e delle superficie di rotazione. Nella seconda parte di questo capitolo l'A. si occupa della geometria dello spazio rigato, accennando alle principali proprietà del complesso lineare di rette e del sistema nullo; inoltre nello stesso capitolo l'A. fa un breve studio della teoria dei poli e delle polari rispetto a superficie di ordine qualunque e di quella delle figure polari reciproche. Il quarto ed ultimo capitolo si può considerare come una buona introduzione della geometria differenziale in coordinate tetraedriche; prima d'ora, per quanto io sappia, la geometria infinitesimale non era mai sta svolta usando tali sistemi di coordinate; merita speciale attenzione la formola dell'angolo di torsione di una curva gobba scritta in modo elegante per mezzo di determinanti.

Un difetto del libro proviene dalla scarsa influenza esercitata sull'A. dagli studii moderni: così, p. es., egli usa locuzioni ormai fuori di uso; in alcuni ragionamenti del secondo volume applica il principio della conservazione del numero, che si potrebbe affatto evitare; nella geometria dello spazio rigato ritiene possibile trasformare l'equazione di un complesso quadratico generale in una contenente i soli quadrati delle sei coordinate omogenee plückeriane, riproducendo un classico errore del Battaglini (1). Si potrebbe notare anche qualche mancanza di coordinamento (p. es., le formole di Plücker sono enunciate solo nel secondo volume); ma questo fatto dipende, presumibilmente, dall'essere stati i due volumi pubblicati a grande intervallo di tempo l'uno dall'altro.

Esclusi questi nèi, il libro del Prof. Caldarera verrà favorevolmente giudicato e lo si troverà utile ad una vasta classe di studiosi. E si deve ammirare l'attività scientifica ancora vegeta e robusta dell'illustre professore di Meccanica razionale dell'Università di Palermo.

G. Z. Giambelli

(1) Però a pag. 154 l'A. osserva che l'equazione del complesso quadratico nella forma canonica del Battaglini non comporta tutta la generalità del complesso rappresentato dalla equazione generale di secondo grado.

Digitized by Google

Scritti d'attualità

Annuaire pour l'an 1909 publié par le Bureau des Longitudes. Avec des Notices scientifique. Paris, Gauthier-Villars. [Prezzo fr. 1,50].

Questo nuovo elemento della celebre serie contiene, oltre i dati astronomici, delle tabelle relative a la Fisica, la Chimica e l'Arte dell'ingegnere. Gli articoli originali inseriti in tale volume sono: G. Bigourdan, *Les étoiles variables;* C. Lallemand, *Mouvements et déformations de la croûte terrestre.* Notiamo da ultimo i discorsi pronunciati da Radau e Deslandres ai funerali del Jannsen.

G. L.

Taschenbuch für Mathematiker und Physiker. Unter Mitwirkung von Fr. Auerbach, O. Knopf, H. Liebmann, E. Wölffing, u. a. *herausgegeben von* Felix Auerbah. — Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1909, 8° picc., pp. XLIV+450. [Prezzo del volume leg. Mk. 6.—].

Il sig. Felice Auerbach osserva nell'Introduzione del presente grazioso volumetto che, mentre esistono dei « Vade mecum » (se così è lecito volgere in italiano la parola « Taschenbuch ») per astronomi, geografi, chimici, ecc., altrettanto non può dirsi riguardo ai matematici. Se ciò dipende dal fatto che di una tale pubblicazione non era avvertito il bisogno o se invece esisteva nella letteratura matematica una deplorabile lacuna che nessuno erasi curato di colmare, altri giudichi. A noi incombe solo l'obbligo di descrivere il contenuto della presente pubblicazione ed eventualmente esprimere qualche desiderio sopra quanto dovrà essere inserito nei volumi a venire.

Il volume si apre con una bella biografia di Lord Kelvin, a cui è annesso un riuscitissimo ritratto del compianto scienziato. Segue il Calendario, una succosa esposizione dei più essenziali dati astronomici e quindi un compendio delle più essenziali tavole numeriche Tutto ciò costituisce una specie di esordio; della parte fondamentale ecco in breve il contenuto.

Matematica: Aritmetica. Algebra. Serie. Analisi. Teoria delle funzioni. Geometria elementare. Geometria superiore. Geometria differenziale. Calcolo delle probabilità. Teoria degli errori. Calcolo grafico.

Meccanica: Statica. Cinematica. Dinamica. Teoria del potenziale. Funzioni sferiche. Funzioni di Bessel.

Digitized by Google

Fisica: Misura di spazi e del tempo. Movimenti, massa e forze. Lavoro ed energia. Elasticità. Idrostatica. Idrodinamica. Gas. Attrito. Capillarità. Suono. Calore. Elettricità e magnetismo. Luce.

Chimica generale: Concetti e leggi fondamentali. Aggregati Soluzioni. Elettrochimica Cinetica e statica chimiche. Affinità.

Non tutti gli argomenti avendo potuti esser svolti, i compilatori adottarono l'ottimo sistema di segnalare quelli che, per mancanza di spazio, furono riserbati ai volumi successivi

Le ultime sessanta pagine contengono notizie di indole pratica ed informazioni che possono tornare utili a matematici e fisici; e cioè: un Elenco di pubblicazioni periodiche, uno di opere da poco pubblicate, l'indicazione dei matematici e fisici morti di recente, gli indirizzi di professori universitari e di altri cultori della matematica e della fisica (sarebbe stato desiderabile che fossero stati ivi compresi anche gli scienziati non tedeschi), finalmente i nomi e gli indirizzi delle principali case tedesche con cui un cultore delle scienze positive può aver bisogno di trattare. Nei volumi seguenti sarebbe opportuno aggiungere notizie intorno ai congressi avvenuti od in preparazione, su i concorsi di recente chiusi o di recente banditi, e sopra le opere in procinto di essere pubblicate.

Come è naturale il volume si chiude con un particolareggiato indice per materie; a cui seguono alcune pagine bianche destinate a nuovi indiriszi che volesse registrare il possessore del volume.

Notiamo da ultimo due cose: una che la riunione in un solo « Vade mecum » della matematica con la fisica venne suggerita dai rapporti fra queste discipline, già stretti e numerosi e tendenti a divenir sempre più intimi e considerevoli; l'altra che i compilatori si sforzeranno che i volumi seguenti escano puntualmente al 1.° gennaio di ciascun anno.

G. L.

Didattica

F. KLEIN. — *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus.* Teil I.: *Arithmetik, Algebra, Analysis.* Vorlesung gehalten im Wintersemester 1907-908 (8°, p. 590). Teil II.: *Geometrie.* Vorles geh. im Sommersemester 1908 (8°, p. 514). Litogr. Leipzig, B. G. Teubuer, 1908-909.

Il corso di lezioni, il cui titolo abbiamo qui fedelmente trascritto, venne tenuto da F. Klein nei due semestri componenti l'anno scolastico 1907-908; e bene fu inspirato il Dott. E. Hellinger o riprodurlo in litografia per diffonderne la conoscenza oltre la cerchia limitata degli ascoltatori dell'illustre professore dell' Università di Gottinga. Fu bene inspirato, diciamo, perchè, quantunque il matematico di

Digitized by Google

professione non troverà ivi sviluppi algebrici o geometrici elevati ed originali, per compenso tutti vi apprenderanno molte notizie sconosciute ed interessanti, una folla di dati precisi, che sarebbe assai malagevole procacciarsi per altra via, ed una quantità di osservazioni argute e geniali, di cui più di un insegnante potrà trarre grande profitto. Specialmente coloro, a cui incombe l'obbligo delle conferenze presso una Scuola di magistero, dovranno essere grati al Prof. Klein per avere, per primo, presentato un quadro delle più essenziali questioni sulle quali deve venire attratta l'attenzione dei futuri insegnanti secondari, lumeggiandole col mezzo dei concetti e dei metodi che caratterizzano l'analisi moderna (1) ed illustrandole con considerazioni storiche e critiche. Così incidentalmente egli ha somministrati nuovi e validi argomenti a sostegno della tesi, all'autore caramente diletta, che, i metodi di insegnamento, anche delle parti più umili della scienza, sono destinati a risentire presto o tardi la benefica influenza dei progressi delle parti più elevate di essa.

Le frequenti digressioni, a cui spesso si abbandona l'A., se rendono più dilettevole la lettura delle lezioni di cui è parola, rendono estremamente malagevole il riassumerle; onde, per dare una idea, per quanto scolorita ed imperfetta, della materia trattata, ci appigliamo al partito di riferirne qui un compendiosissimo indice.

Volume I.

Introduzione. — Tendenza generale di questo corso; ausiliari bibliografici.

Parte I. *Aritmetica.* — 1. Calcoli con numeri naturali. - 2. Prime estensioni del concetto di numero. - 3. Proprietà specifiche dei numeri interi. - 4. I numeri complessi. - Intermezzo sopra lo sviluppo moderno della matematica in generale.

Parte II. *Algebra.* — Trattati. - Applicazione di metodi geometrici alla risoluzione delle equazioni. - 1. Equazioni a coefficienti ed incognite reali. - 2. Equazioni nel campo complesso. - Esempi.

Parte III. *Analisi.* 1. Il logaritmo e la funzione esponenziale. - 2. Le funzioni trigonometriche. - 3. Calcolo infinitesimale.

Appendice. — 1. Trascendenza di e e π. - 2. Teoria degli insiemi.

Volume II.

Introduzione. — Scopo di questo corso; osservazioni sopra le tendenze fusioniste.

(1) Per siffatta loro qualità i volumi che annunciamo possono riguardarsi come l'ulteriore sviluppo dell'idea madre del noto opuscolo in cui il Klein esaminò dal punto di vista moderno i tre problemi classici dell'antica geometria.

Digitized by Google

Parte I. *Le più semplici figure geometriche.* — Il segmento, l'area ed il volume come grandezze relative. - 2. e 3. Il principio di Grassmann nel piano e nello spazio. - 4. Ulteriore classificazione delle più semplici figure geometriche in base al loro contegno di fronte ad una trasformazione delle coordinate.

Parte II. *Le trasformazioni geometriche.* — 1. La trasformazione affine. - 2. Le trasformazioni projettive. - 3. Altre trasformazioni puntuali. - 4. Trasformazioni fra elementi eterogenei. - 5. Appendice sopra la teoria degli immaginari.

Parte III. *Sistematica e fondamenti della geometria.* - 1. Sistematica. - 2. Fondamenti della geometria.

Appendice. — Lo sviluppo dell'insegnamento della geometria in Inghilterra, in Francia, in Italia ed in Germania.

NOTIZIE

UN'OPERA IN PROGETTO. — La sezione lombarda della Società « Mathesis », in seguito ad una Relazione del Prof. R. Bonola, ha preso l'iniziativa della pubblicazione di una « Enciclopedia delle matematiche elementari » destinata ad abbracciare anche le materie insegnate nel primo biennio delle nostre Facoltà di Scienze. L'utilità di una tale pubblicazione è così evidente che siamo certi d'interpretare il sentimento di tutti i nostri lettori augurando che questo bel progetto venga presto attuato.

CONGRESSO SCIENTIFICO SUD-AMERICANO. — Nella riunione tennta nel 1908 a Santiago de Chile furono trattati molti argomenti interessanti la Geodesia, l'Astronomia, ecc.. Inoltre il sig. Obrecht (direttore dell'Osservatorio astronomico del Chilì) lesse un lavoro « Sopra la probabilità del termine medio » ed il sig. Gilemont indicò un procedimento per risolvere un sistema determinato di equazioni lineari senza ricorrere a determinanti, che è desiderabile venga presto in dominio di tutti.

AVVERTIMENTO. — Le *Cinq études de géométrie analytique* di M. Stuyvaert, di cui venne reso conto nel *Bollettino* (T. XI, p. 26-27) formano un volume che trovasi in vendita presso la Librairie scientifique E. van Goethem di Gand (Rue des Foulons, 1), al prezzo di fr. 6.

UN DIZIONARIO BIO-BIBLIOGRAFICO ITALIANO (400-1900). — Al Congresso internazionale di scienze storiche, che ebbe luogo a Berlino

Digitized by Google

dal 6 al 12 agosto 1908, Leone Caetani di Sermoneta diede notizia di un Dizionario bio-bibliografico, da lui intrapreso da alcuni mesi, col concorso di numerosi collaboratori, il quale mira a colmare una grave lacuna della letteratura italiana, vivamente deplorata dai cultori della storia italiana in generale, in tutti i suoi varii aspetti, cioè storico propriamente detto, scientifico, letterario, artistico, ecc. Il lavoro uscirà in fascicoli o volumi, col materiale ordinato alfabeticamente, ed ognuno sarà complemento od appendice dei precedenti. Presentemente il lavoro converge su materiale strettamente biografico, di cui tanta copia esiste perduta e sconosciuta nelle biblioteche pubbliche e private d'Italia. Compiuto tale spoglio, si procederà ad elaborare con lo stesso sistema l'altro estesissimo materiale contenuto nelle pubblicazioni storiche, nelle cronache, ecc.

Auguriamo il più completo successo a questa nobile impresa, la cui importanza fu affermata in seno alla Società bibliografica italiana, che, appena sorta, ne aveva posta l'effettuazione fra i precipui suoi scopi. Delle fasi venture di essa i nostri lettori verranno informati.

L'ULTIMO TEOREMA DI FERMAT. — In data 27 giugno 1908 la Società Reale delle Scienze di Gottinga ha pubblicato un avviso assai importante, di cui ecco la versione in italiano:

« In conseguenza del lascito fattoci dal defunto Dott. Paolo Wolfskehl di Darmatadt viene assegnato un premio di *Centomila marchi* a colui che riuscirà per primo a dimostrare il grande teorema di Fermat. Nel suo testamento il Dott. Wolfskehl osserva che Fermat (v. p. es. *Oeuvres de Fermat,* T. I, Paris 1891. pag. 251, Osserv. II) ha, *mutatis mutandis,* asserito che l'equazione $x^{\lambda} + y^{\lambda} - z^{\lambda}$ è irrisolubile in numeri interi per tutti gli esponenti interi λ che sono numeri dispari primi. Tale teorema di Fermat devesi dimostrare o nel senso indicato da Fermat o, a complemento delle ricerche di Kummer (*Giornale di Crelle,* T. XL, p. 130; *Abh. d. Akad. d. Wiss. zu Berlin,* 1857), per tutti gli esponenti λ pei quali sussiste. Ulteriori notizie bibliografiche si troveranno in: Hilbert, *Theorie der algebrischen Zahlkörper,* Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, T. IV (1894-95) § 172-173, e *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften,* Bd. I (Arithmetik und Algebra), Teil 2 (1900-904), T. C. 4 b, pag. 713.

Il conferimento del premio si effettuerà sotto le condizioni seguenti:

La Società Reale delle Scienze di Gottinga si considera pienamente libera nel decidere a chi dovrà aggiudicarsi il premio. Essa

Digitized by Google

respingerà qualunque manoscritto relativo a quel premio per la dimostrazione del teorema di Fermat; ma prenderà in considerazione esclusivamente le memorie matematiche pubblicate in periodici o come monografie o libri esistenti in commercio. La Società invita gli autori ad inviarle siffatte memorie in cinque esemplari. Dal premio restano esclusi i lavori scritti in una lingua inintelligibile agli scienziati chiamati a giudicare. In luogo di tali lavori possono presentarsi delle traduzioni dichiarate esatte dall'autore.

La Società non assume alcuna responsabilità per la non considerazione di lavori rimastile sconosciuti o per errori provenienti dall'essere alla Società stessa rimasto ignoto il vero autore del lavoro o di una parte di esso.

Pel caso in cui alla soluzione abbiano partecipato parecchie persone o che la soluzione sia il prodotto del lavoro di diversi scienziati, la Società si riserba piena libertà di decisione, in particolare riguardo alla ripartizione del premio.

Il conferimento del premio da parte della Società avrà luogo non prima di due anni dalla pubblicazione della memoria premianda. Così in questo periodo i matematici tedeschi e stranieri avranno la possibilità di manifestare le loro opinioni sull'esattezza della memoria in questione.

Avvenuto il conferimento del premio, il Segretario ne darà notizia all'interessato in nome della Società e farà ciò noto in tutti quei luoghi ove il premio era stato annunziato.

L'aggiudicazione del premio da parte della Società è inattaccabile.

Il pagamento del premio verrà fatto all'interessato entro tre mesi dalla Cassa universitaria di Gottinga oppure a spese ed a rischio dell'interessato in altro luogo da lui designato e precisamente il capitale in questione verrà pagato in contanti o in carte pubbliche, a scelta della Società, contro regolare ricevuta.

Se il premio non verrà conferito entro il 2007, nessuno potrà più pretendervi.

A partire da oggi entra in vigore la Fondazione Wolfskehl sotto le condizioni sopraenunciate. »

Enrico Maschke. — Il nome di questo egregio scienziato è ed è destinato a rimanere per sempre legato alla risoluzione dell'equazione di 6° grado, avendo egli, contemporaneamente ed indipendentemente dal Brioschi, trovate le espressioni delle radici di una tale equazione col mezzo di funzioni theta iperellittiche. Egli naque a Breslavia il 24 ottobre 1853 e morì a Chicago il 1° marzo 1908. Esauriti nel 1872 gli studi secondari nel Ginnasio di S. Maria Mad-

Digitized by Google

dalena della sua città natale, passò un semestre all'Università di Heidelberg; nel 1875 lo troviamo a Berlino; nel 1880 conseguì a Gottinga la laurea dottorale. Ma anche prima aveva incominciata la sua carriera d'insegnante secondario. Più tardi tornò a Gottinga ove subì l'influenza del Klein. Quantunque fornito di non comuni qualità didattiche, egli aveva un'invincibile repulsione per le occupazioni d'insegnante medio; onde nel 1891, dopo essersi addestrato nella pratica dell'elettrotecnica, salpò pel nuovo mondo, ove non tardò a trovare da occuparsi appunto in un'officina elettrica. Ma l'anno scorso successivo l'Università di Chicago lo chiamava nel proprio seno in qualità di « Assistent Professor »; in tale istituto egli passò il resto della sua vita, raggiungendovi il grado di professore ordinario; un'implacabile malattia lo spense nel pieno vigore del corpo e dello spirito.

I suoi lavori, che sommano a 25, si trovano elencati ed analizzati in una necrologia scritta da O. Bolza e pubblicata nel T. XVII (1908) dei *Jahresber. der Deutschen-Mathem. Vereinig.*

UNA NUOVA FORMOLA DI CRONOLOGIA MATEMATICA. — È noto che la cronologia giudaica è così complicata che fu causa di molte ore di lavoro a storici di vaglia; a Gauss spetta il gran merito di avere scoperta una formola che permette di trovare agevolmente la data della Pasqua, col mezzo della quale è possibile trasformare una data ebraica in altra del periodo giuliano o gregoriano. La questione analoga di determinare l'epoca di determinare la Pasqua degli Ebrei servendosi della cronologia maomettana è stata di recente trattata da Adolf Fränkel in un articolo appunto intitolato *Bestimmung des Datums des jüdischen Osterfestes für di Zeitrechnung der Mohammedaner* (Zeitschr. f. mathem. u. naturw. Unterr., T. XXIX, 1908) che va raccomandato a chi s'interessa a siffatte questioni.

TEMA POSTO A CONCORSO DALLA R. ACCADEMIA DI NAPOLI. — « Esposizione sistematica delle nozioni aquisite sulle configurazioni geometriche del piano e degli spazi, mettendole in relazione con la teoria delle sostituzioni e potendovi possibilmente qualche nuovo contributo ». Premio L. 1000. Scadenza 30 giugno 1910. Le memorie dovranno essere scritte in italiano, francese o latino ed essere inviate alla Segreteria dell'Accademia entro il termine suindicato.

GIUBILEO DI H. G. ZEUTHEN. — In occasione del LXX genetliaco del grande scienziato danese venne pubblicato un bel volume *(Festskrift til H. G. Zeuthen fra venner og elever i anledning af hans 70 aars fodelsdag, 15 februar 1909)* adorno di uno splendido

Digitized by Google

ritratto dell'onorato e contenente una variopinta raccolta di scritti destinati a ricordare i varii lati della poliedrica sua attività. Eccone gli autori e gli argomenti: A. A. Bjornbo. *Sopra le tavole trigonometriche di Al-Chawârizmî;* S. A. Christensen, *Studi danesi sopra gli Elementi di Euclide;* C. Crone, *Sopra una trasformazione che muta in sè stessa una curva di quart'ordine e genere 3;* J. P. Gram, *Nuove osservazioni sopra la teoria dei numeri di Fermat;* J. L. Heiberg, *Sopra un passo di Archimede;* J Hjemslev, *Sopra lo spazio a infinite dimensioni;* J. L. W. V. Jensen, *Sopra la teoria delle frazioni continue;* C. Juel, *Nuovi problemi con infinite soluzioni;* O. Kragh, *Le equazioni differenziali del moto relativo;* J. Mollrup, *Dimostrazione d'un teorema d'esistenza di G. Cantor;* N. Nielsen, *Contributi ad una teoria generale degli sviluppi in serie seconde funzioni sferiche di seconda specie di Franz Neumann;* E. Schou, *Contributo alla risoluzione del problema d'inversione di Jacobi;* E. Valentiner, *Sopra la posizione delle cuspidi d'una curva di 6° ordine;* H. Valentiner, *Salla determinazione di poligoni inscritti e circoscritti ad una curva piana generale del terzo ordine.*

LA NOZIONE D'INFINITO SECONDO GLI STUDI PIÙ RECENTI è il titolo di una memoria pubblicata dal Prof. Giulio Vivanti nel Vol. XXIII (1908) degli *Atti della R. Accademia Peloritana* e che va raccomandata a tutti coloro che vogliono conoscere le ultime fasi (1) e lo stato presente di una questione che, per la sua importanza filosofica e matematica da venti secoli almeno continua a fomentare vive discussioni. Oltrechè annunciarla, diamo i titoli dei §§ che la compongono: 1. La nozione d'infinito e la legge dei tre stadi. 2. L'infinito nel Calcolo infinitesimale. 3. L'idealista e l'empirista di Du Bois-Reymond. 4. L'infinito nella Geometria. 5. I tre problemi di esistenza dell'infinito. 6. Bolzano. 7. G. Cantor. 8. Numeri ordinali transfiniti. 9. Operazioni sui numeri ordinali transfiniti. 10. Numeri cardinali transfiniti. 11. I numeri transfiniti dedotti dalla teoria degli aggregati di punti. 12. Le basi psicologiche della teoria di Cantor. 13. L'obiezione di Burali-Forti. 14. La definizione dell'infinito di Dedekind. 15. Grandezze infinite. 16. La classe dei segmenti rettilinei. 17. Il continuo. 18. Riassunto. 19. Appendice (cenni sopra opere di Gutberlet, Geissler, Russell, Couturat).

(1) Per le fasi anteriori si ricorra al noto scritto deilo stesso autore sopra *Il concetto d'infinitesimo e la sua applicazione alla matematica*, ristampato nel *Giornale di matematiche*, T. XXXIX (1901).

Digitized by Google

IL VALORE DELLA LIBBRA ROMANA, secondo i più reputati autori, è in media di gr. 323,258; ora da una serie di pesi romani, recentemente scoperta a Palestrina, in un antico pozzo, M Lazzarini ha dedotto (v la nota sopra *Una serie di pesi romani campioni,* Bull. della Comm. archeol. comunale, Roma 1908) il valore 323,316 concordante in sostanza col precedente. Per ciò questo risulta da questi nuovi studii validamente confermato.

UN'ESPOSIZIONE MATEMATICA ebbe luogo a New-York dal 4 gennaio al 13 febbraio del corrente anno sotto gli auspici del « Teachers College » annesso all'Università colombiana (New-York) con materiali illustranti lo sviluppo storico della matematica tratte dalle collezioni possedute dal Prof. D. E. Smith. Crediamo far cosa gradita ai nostri lettori estraendo dal Catalogo pubblicato in tale occasione alcune notizie intorno alle cose esposte.

I. *Trigonometria ed astronomia* (libri ed istrumenti illustranti i metodi geodetici ed astronomici dei più antichi popoli). II. *Scale e pesi; matematica cinese e giapponese.* III. *La misura del tempo.* IV. *Medaglioni di matematici* V. *Bussole, strumenti per misurare lunghezze, astrolabi.* VI. *Sviluppo dei sistemi numerali.* VII. *Misticismo numerico e giuochi.* VIII. *Macchine per calcolare.* IX. *Libri rari.* X *Classici persiani, arabi e sanscriti.* XI.-XII. *Illustrazione per l'opera Rara arithmetica*, che il Prof. Smith sta per pubblicare. XIII. *Matematica dei babilonesi.* XIV. *L'influenza di Euclide* (mss. di traduzioni degli « Elementi » in arabo e cinese; prime edizioni di tale opera). XV. *Matematica degli egiziani.* XVI. *Ritratti ed illustrazioni.* XVII. *Ritratti di matematici.* XVIII a XXIII. *Autografi di matematici.* XXIV. *Opuscoli rari.* XXV. *Manoscritti di Bahascara.* XXVI. *Altri manoscritti.*

IN MEMORIA DI P. TANNERY. — Il volume IV della VI Serie dei *Mém. de la Soc. des sciences de Bordeaux* contiene uno scritto formato dalla riproduzione della biografia dell'illustre estinto, scritta dal fratello Giulio e già pubblicata in occasione del II Congresso filosofico, da un articolo di P. Duhem sopra le relazioni fra P. Tannery e la Società scientifica di Bordeaux e finalmente da un Elenco dei lavori di lui, redatto, con diligenza ed intelligenza rare, dalla vedova. Tale Elenco rappresenta il lavoro preparatorio all'edizione completa delle opere del rimpianto scienziato francese che si prepara sotto la direzione dei Proff. Heiberg e Zeuthen. Nell'attesa di essa segnaliamo la nota postuma sopra *L'invention de l'hydraulis*, inserita nel T. XXI della *Revue des études grecques.*

Digitized by Google

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E STORIA

DELLE

SCIENZE MATEMATICHE

ANNO XI — Ottobre, Novembre e Dicembre — 1908

Storia

FELIX MÜLLER. — *Führer durch die mathematische Literatur mit besonderer Berücksichtigung der historisch wichtingen Schriften.* (Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik, XXVII Heft). Leipzig und Berlin, B. G. Teubner 1909, 8°. pag. X+252 [Prezzo Mk. 7].

L'opera che annunciamo fu scritta con l'intento di porgere una guida degna di fiducia a coloro che vogliono procurarsi informazioni esatte sopra un ramo qualsiasi della matematica od anche soltanto sopra un problema speciale od un solo teorema. L'utilità di un'opera siffatta non ha bisogno di venir dimostrata, onde larga lode va tributata al Prof. Müller per essersi assoggettato alle non lievi fatiche di scriverla; d'altronde nessuno meglio di lui era designato a scriverla, chè è ben nota la dottrina e la diligenza di colui che da quarant'anni prende parte attivissima alla redazione del *Jahrbuch über die Forschritte der Mathematik.*

L'opera in discorso non è una Bibliografia matematica (lo prova, a tacer d'altro la modesta sua mole), ma un ausiliario prezioso per chi intende orientarsi in un determinato campo di ricerche matematiche. Delle tre parti di cui risulta la I concerne la storia delle matematiche, le opere enciclopediche e le biografie; la II la filosofia, la pedagogia, l'algebra, l'aritmetica e l'analisi; la III la geometria. Per meglio determinare il contenuto di ciascuna riferiamo i titoli dei capitoli in cui ognuna è divisa:

I) 1. Opere sulla storia delle matematiche - 2. Biografie - 3. Opere complete; classici delle scienze esatte - 4. Periodici matematici - 5. Bibliografie matematiche - 6. Enciclopedie e compendi.

II) 1. Filosofia della matematica - 2. Pedagogia matematica - 3. Algebra - 4. Aritmetica - 5. Analisi elementare - 6. Analisi superiore.

III) 1. Geometria pura, elementare e descrittiva - 2. Geometria superiore.

Per ogni soggetto l'A. indica un certo numero di fonti e nella

Digitized by Google

scelta di esse si rispecchiano naturalmente i gusti e le tendenze dell'A., onde è certo che ogni lettore troverà da fare appunti o lamenti; noi ci guarderemo dal manifestare le critiche che ci si presenterebbero, ben sapendo che alla lor volta sarebbero trovate inaccettabili da più d'uno dei nostri lettori. Ma quello che non crediamo del caso di tacere è la domanda: per ogni argomento qual'è l'ordine in cui l'A. ha distribuite le fonti indicate? Come criteri ordinatori si potevano prendere l'ordine alfabetico, l'ordine cronologico, la nazionalità degli autori o l'importanza intrinseca delle opere citate. Ora l'A. sembra non siasi attenuto ad alcuno di essi ed abbia preferito notare le opere a caso. A provar ciò prendiamo ad esempio l'elenco dei trattati di gemetria moderna (p. 173); lo riproduciamo qui sotto una forma concisa, ma che siamo certi riuscirà intelligibile pei lettori al corrente della letteratura sull'argomento:

Hankel (1875); Flauti (1842); Cremona (1873); Reye (1886); Em. Weyr (1883); Aschieri (1888); Bobek (1899); Sannia (1891); Thomae (1893); Amodeo (1896); Torroja (1899); Böger (1900); Burali-Forti (1904); Enriques (1904); Döhlemann (1905); Emch (1905); Severi (1906); Chasles (1852); Fiedler (1862); Gretschel (1868); Amiot (1865); Lenthéric (1874); Maier (1874); Staudigl (1871); Rottok (1877); Seeger (1880); Fuhrmann (1881); Pasch (1882); Lachlan (1893); Russel (1893); Kober (1898); Duporcq (1899); Macdonald (1891); Richard (1899); Steiner-Geiser- Schröter (1887-1898 ; Geiser (1869); Buchbinder (1878-80); Gallekamp (1876-80); Milinowski (1882); Erler (1903); Lange (1900); Halsted (1893.

La semplice ispezione di quest'elenco rende manifesti gli inconvenienti che possono derivare dalla distribuzione capricciosa scelta dall'A.; ma per renderli ancora più chiari siaci lecito riferire l'analogo elenco relativo alla geometria non-euclidea che trovasi a p. 133:

G. Bolyai-Karagiannides (1893); Bonola (1900, 1906); Lobatschewsky (1835-38); Lobatschewsky-Liebmann (1903, 1905); Beltrami (1868); Liebmann (1905); Frischauf (1872); Hoüel (1872); Frischauf (1876); Klein (1872, 1889-90); Killing (1885); Beez (1888); Fano (1898); Gérard (1892); Poincaré (1891); Mansion (1896-98); Barbarin (1907); Vahlen (1905) [E S. Lie?].

Le ragioni per cui io ritengo che sarebbe stato ottimo consiglio il distribuire le opere citate in ordine di loro importanza intrinseca o storica vennero da me già esposte in altra occasione (1), onde è superfluo ripeterle; ma prima di chiudere questa breve analisi non possiamo esimerci dall'osservare come, anche a prescindere da ciò, il posto in cui certe opere vennero collocate verrà da molti ritenuto mal scelto. Così ad es. la *Theorie der vielfachen Kontinuität* dello

(1) *Sui metodi di compilazione dei cataloghi bibliografici* (questo *Bollettino* III, 1900, pag. 65-70).

Digitized by Google

Schläfli (v. p. 51), non è uno scritto concernente l'infinito numerico ma la geometria metrica degli iperspazi, mentre per compenso i *Fondamenti della teoria dei tipi ordinati* del Vivanti non può certamente annoverarsi, come fa l'A. (p. 217), fra i recenti scritti ipergeometrici. Così i *Beiträge zur Geometrie der Lage* dello Staudt potevano essere collocati altrove meglio che fra gli scritti relativi ai numeri complessi (p. 114), mentre nella *Geometrie der Lage* del medesimo autore dell'immaginario in geometria non è fatto alcun cenno come crede l'A. (p. 187), argomento che invece è ampiamente svolto nei *Beiträge*. Può anche far meraviglia che l'A. citi del Lucas (p. 82) l'introduzione alle *Récréations mathématiques* e non quest'opera così altamente apprezzata dai competenti; finalmente è da deplorare che fra gli scritti relativi alle ricerche sulla distribuzione dei numeri primi l'A. non abbia annoverata la dottissima memoria di Gabriele Torelli, premiata non ha guari all'Accademia di Napoli. Di altre osservazioni di minor conto non facciamo cenno, perchè troppo ci dorrebbe d'ingenerare nel lettore l'idea che vogliamo deprezzare un coscienzioso lavoro; mentre all'opposto riteniamo che esso debba prendere posto in qualunque biblioteca e sia destinato a fungere da ottimo *vade mecum* per ogni investigatore delle proprietà dei numeri e delle figure.

G. L.

W. W. Rouse Ball. — *A short Account of the History of mathematics*. Fourth edition. London Macmillan 1908, 8°, p. XXIV+ 522 [Prezzo del volume legato sh. 10].

Pochi libri trovarono la sorte amica quanto questo volume del Ball! In venti anni quattro edizioni e due traduzioni, in italiano l'una, in francese l'altra, sono attestazioni indiscutibili di un successo veramente straordinario. Per rendersene ragione basta tener presente che esso valse a colmare una lacuna da tempo lamentata e che è scritto sotto una forma piacevole senz'essere mai volgare. Se una cosa è da lamentare è che il Ball non si sia abbastanza adoperato per conservarsi il favore del pubblico, col migliorare il suo scritto dei difetti in certi particolari che segnalarono i critici di esso e coloro che si occuparono di eseguire o rivedere le due succitate traduzioni. Nella speranza che egli vorrà in avvenire seguire questo spassionato consiglio, gli segnaliamo la dottissima analisi dell'opera in discorso che fece il P. B. Lefebvre, S. J. (*A propos d'une histoire des mathématiques* in appendice al fascicolo di Marzo 1909 di *Mathésis*), la quale per la vastità del piano e l'originalità dei dati e delle vedute ricorda una celebre recensione che Th. H. Martin fece del primo lavoro storico di M. Cantor.

G. L.

Digitized by Google

GINO LORIA. — *Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche*. Terza edizione accresciuta di uno *Sguardo allo sviluppo della geometria in quest'ultimo decennio*. Torino, Carlo Clausen 1907. 8°. pag. XXIII+475 [Prezzo del vol. leg. L. 8].

Della 2.ª edizione dell'opera presente venne esposta in queste pagine un'accurata analisi da persona competente (v. *Bollettino*, I, 1897, p. 145). La terza differisce dalla precedente per una lunga serie di correzioni ed aggiunte e specialmente per uno « Sguardo alla produzione geometrica di quest'ultimo decennio », il quale può designarsi siccome risultante da un complesso di addizioni ai singoli paragrafi dell'opera primitiva, giacchè ne riproduce il piano e l'andamento in scala ridotta. Tale uniformità della nuova edizione con la precedente trova la propria spiegazione nella lusinghiera accoglienza che il pubblico accordò a quella e speriamo ci giustificherà se, scambio di presentare un nuovo resoconto critico dell'opera, noi (esumando un sistema a cui Königsberger e Zeuner non riuscirono a dare che un'effimera attuazione (1)) lasciamo la parola all'A. perchè esplichi gli scopi che si prefisse ed i metodi a cui si è attenuto.

Due stadii si possono distinguere nella storia di qualunque disciplina (anzi in qualunque ramo di storia). Nell'uno si adunano accuratamente e spassionatamente tutti i fatti relativi al soggetto che si studia, senza escluderne alcuno, per quanto di apparenza modesta od anche insignificante, in base all'osservazione che la legge di proporzionalità fra causa ed effetto nessuna applicazione trova nel campo morale; è quella che Nesselmann chiamava a ragione « storia pragmatica »; chi se ne occupa deve sforzarsi di annullare la propria personalità, di far tacere tutte le proprie preferenze, per divenire un semplice collettore di fatti accertati, un fotografo degli avvenimenti. Nell'altro invece chi scrive tiene presente tutto il materiale adunato dagli storici pragmatici, misura, paragona e giudica l'importanza dei fatti e delle persone e ne trae come conclusione un quadro dello sviluppo storico d'un determinato ordine d'idee; è quella che può dirsi « storia filosofica ». Essa corrisponde ad uno studio più evoluto della ricerca storica e può applicarsi soltanto a fatti di data relativamente antica, a teorie che già raggiunsero un considerevole sviluppo, per non dire un assetto definitivo, ed esige che chi vi si consacra abbia a propria disposizione una collezione assai ricca di fatti di indiscutibile certezza.

Quest'ultima condizione essendo stata dimenticata o trascurata

(1) Alludo qui al noto *Repertorium der literarischen Arbeiten* di cui non poterono venir pubblicati che due volumi.

Digitized by Google

da molti storici, ebbero origine delle costruzioni assolutamente fantastiche, che, oltre ad essere destituite di valore e prive di utilità, screditarono un nobilissimo ramo dello scibile; ma poichè ogni azione genera una reazione corrispondente, gli scritti in parola produssero, in quest'ultimo mezzo secolo, uua splendida fioritura di lavori di storia pragmatica relativi (per rimanere nel campo che ci interessa) alla matematica: ricordiamo ad esempio i Rapporti che in Francia si pubblicarono nell'epoca dell'apogeo del I Napoleone ed alla vigilia della caduta del III, che in Inghilterra videro la luce sotto gli auspici della « British Association » ed a cui dì nostri in Germania dedica tante cure la « Deutsche Mathematiker-Vereinigung ». Orbene a quest'ultima serie di lavori modestamente aspira di far parte l'opera a cui ri riferisce il presente annuncio. Molte delle teorie in essa trattate sono attualmente in istato di formazione, onde qualunque giudizio intorno al valore definitivo delle ricerche che vi si riferiscono sarebbe immaturo e rischierebbe di venire smentito in un non lontano avvenire; onde per esse era dovere dello scrittore di non abbandonare mai la veste del semplice annalista; soltanto per pochi altri invece si è raggiunto un tale stadio di maturità che il futuro non può preparare alcuna sorpresa, onde per esse fu lecito avventurarsi nel campo seducente quanto pericoloso della storia filosofica. Ma sono questi casi isolati ed eccezionali. Non cerchi dunque il lettore quello che l'A. non volle fare; può darsi che, prima di pronunciare il *nunc dimittis,* egli, per certe parti almeno, si avventuri a scrivere una vera storia; ma pel momento ritenne inopportuno il tentarlo e, crediamo, nessuno abbia il diritto di muovergliene rimprovero, dal momento che ad una sola cosa un autore è tenuto: di mantenere l'impegno liberamente preso verso i propri lettori. Se poi tale impegno sia stato osservato nel caso presente, non a noi spetta giudicare!

G. L.

R. Rudio. — *Der Bericht des Simplicius ueber die Quadraturen des Antiphon und des Hippocrates.* Mit 11 Figuren im Texte. Leipzig, Teubner 1907, 8° picc., pag. X+184 [Prezzo Mk. 4,80].

Benchè la letteratura matematica dei Greci si debba oggi far cominciare con gli « Elementi di Euclide », tutto il resto essendo stato vittima del tempo, pure, grazie ai commentatori di Aristotele, ci è stata conservata l'essenza di alcune ricerche anteriori di Ippocrate da Chio sul problema della quadratura del circolo, le quali, se ci fossero state letteralmente tramandate, costituirebbero un documento oltre ogni dire prezioso. Il mondo matematico ne venne a

Digitized by Google

conoscenza nel 1526 quando Aldo Manuzio pubblicò a Venezia il volume intitolato: *Simplicii Commentarii in octo Aristotelis physicae auscultationis libros cum ipso Aristotelis textu.* Che i cultori delle scienze esatte vi abbiano saputo scoprire quanto loro interessava è dimostrato dall'opuscolo Jo. Baptistae Portae Neapolitani *Elementoram curvilineorum Libri tres* (Romae M. DC) (pubblicato nove anni prima incompletamente) in cui il celebre autore della *Magia naturale* ha seguito il concetto di Ippocrate di arrivare alla quadratura del cerchio attraverso delle lunole quadrabili e credette e fece credere ai suoi contemporanei di avere conseguito l'intento.

Quel commento di Simplicio venne ristampato dallo Spengel (1865, 1870) ed attrasse l'attenzione di uno dei più egregi storici della matematica, C. A. Bretschneider, seguendo il quale l'Hankel (1874) ed il Cantor (1880) posero Ippocrate nel posto di cui ha diritto nella storia delle scienze esatte.

Il testo di Simplicio venne poi esaminato, coll'aiuto dei possenti metodi offerti dalla moderna critica filologica, successivamente dall'Allman, dal Diels, da P. Tannery e finalmente dal Rudio in quattro memorie, alcune delle quali ben note ai lettori della « Bibliotheca mathematica ». Ora a questo stesso commento e ad altri scritti che vi si collegano questo geometra ha pubblicato in un prezioso volumetto, il quale completa in un certo senso l'anteriore sua pubblicazione sopra *Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre* (Leipzig, 1892).

Il nuovo volumetto, il cui titolo trovasi in testa al presente articolo, si apre con un'introduzione destinata alla storia del testo di Simplicio; segue l'edizione critica di tale testo, accompagnata da una traduzione tedesca; finalmente si ha una breve storia del problema della quadratura del cerchio a partire dagli Egiziani (1), sino ad Euclide esclusivamente. Il dottissimo e diligentissimo A. chiude la sua opera con un indice dei vocaboli e con un elenco dei nomi citati.

Con l'annunziato volume viene inaugurata una nuova collezione di opere edite dalla Casa Teubner, collezione intitolata *Urkunde zur Geschichte der Mathematik im Altertume* ed a cui auguriamo rapido e florido sviluppo. Possa il successo che noi le desideriamo invogliare qualcuno a progettare ed effettuare altre raccolte analoghe, destinate ad adunare documenti dispersi relativi alla storia della matematica dell'Evo medio e dell'Epoca moderna (2)!

G. L.

(1) Perchè mai l'A. non ha ricordato il valore $\pi = 3$, che trovasi negli scritti biblici e che è senza dubbio legato all'inscrizione dell'esagono regolare nel cerchio?

(2) A chi ritenesse superflua una raccolta di scritti rari relativi alla Matematica moderna, ricorderò l'opuscolo di A. de Gasparis sui determinanti cubici pubblicato sotto un pseudonimo, che è già una rarità bibliografica e minaccia di andare perduto.

Digitized by Google

Festschrift zur Feier des 200. Geburtstages LEONHARD EULERS. — Herausgegeben vom Vorstande der Berliner mathematischen Gesellschaft. Mit 2 Bildnissen Eulers. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner 1907, 8°, pag. 137 [Prezzo Mk. 5].

A degnamente ricordare il secondo centenario della nascita di Eulero la Società matematica di Berlino ha tenuto un'adunanza solenne il 15 aprile 1907 ed ora la direzione di quel giovane ma fiorente sodalizio ha pubblicato il presente volume, il XXV di una nota collezione *(Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik)*. I due ritratti che lo adornano riproducono dipinti uno del Darbes (1782), l'altro di A. Lorgna (1787); i quattro scritti che lo formano sono di G. Valentin, A. Kneser, F. Müller e E. Lampe.

Di indole esclusivamente biografica è il primo, nel quale sono accuratamente investigati e descritti i rapporti non sempre amichevoli che passarono fra il sommo matematico ed il Grande Federico di Prussia: i documenti posti a base di tale studio non sono inediti, ma essendo poco noti ai matematici, questi vi apprenderanno più d'un fatto ignorato relativo alle condizioni in cui nel secolo XVIII si trovavano gli scienziati alla Corte di Berlino.

Più profonde sono le ricerche consegnate nel secondo degli articoli in questione, ove lo Kneser investiga l'opera di Eulero come precursore di Lagrange, inventore del calcolo delle variazioni. Ai cultori di questo ramo delle matematiche segnaliamo le appendici a tale lavoro, i cui temi sono risp.: I. *Esposizione rigorosa del metodo con cui Eulero risolvette i più semplici problemi del calcolo delle variazioni.* II. *Fondamenti del calcolo delle variazioni nella teoria delle funzioni analitiche di Lagrange.* III. *Metodo usato da Eulero per trovare gli « estremi » col mezzo di equazioni differenziali.* Giudichiamo poi valga la pena riferir qui la chiusa della conferenza dello Kneser:

« E quali sono in generale gli scopi di una ricerca storica per un matematico? Leibniz si è espresso una volta riguardo all'utilità di siffatte considerazioni: l'importanza di esse, non risiede solo in ciò che la storia dia a ciascuno il suo e stimoli altri a conseguire congeneri onori, ma il suo intento è di accrescere l'« ars inveniendi » e di illustrare i metodi con esempi cospicui *(Historia et origo calculi differentialis)*. Ora io ritengo che nel valutare la storia noi dobbiamo andare oltre Leibniz. Da Goethe abbiamo imparato a considerare la personalità come la fortuna massima dei figli della terra, epperò come l'oggetto incondizionatamente più interessante di qualunque storia. Noi vogliamo innalzarci mediante il commercio intellettuale cogli uomini grandi e siccome in quest'ora di festa abbiamo cercato e siamo riusciti a tastare il polso d'una personalità scienti-

Digitized by Google

fica quale è Eulero, così può applicarsi a noi l'invocazione del poeta: Benedetto sia colui che ricorda volentieri il proprio padre! »

Una completa rassegna delle scoperte puramente matematiche fatta da Eulero trovasi nell'articolo di F. Müller, una vera autorità in materia; articolo in cui sono indicati i contributi dati da quel celebre scienziato alla filosofia delle matematiche, all'algebra, alla teoria dei numeri, all'analisi combinatoria, all'analysis situs, alle frazioni continue, alla teoria delle serie, al calcolo differenziale ed integrale, al calcolo delle variazioni, alla teoria delle funzioni, alla geometria elementare ed alla geometria analitica e differenziale; il Prof. Müller da bibliografo cousumato, con esatte citazioni, dà modo ai propri lettori di verificare la verità delle sue asserzioni, accrescendo così il pregio del proprio lavoro.

Finalmente E. Lampe fa uno spoglio del carteggio fra Giovanni Bernoulli ed Eulero per scoprire le origini ed i primi stadi di sviluppo dei concetti di funzione esponenziale e funzione logaritmica.

Non bastano queste notizie intorno alla presente pubblicazione a dimostrare che i matematici berlinesi seppero ben degnamente ricordare uno dei fondatori dell'analisi moderna?

G. L.

G. Vassura. — *La pubblicazione delle opere di Evangelista Torricelli, con alcuni documenti inediti.* Notizie e disegno. Faenza, Giugno 1909, 8°, pag. 59 [Prezzo L. 1].

È noto che Evangelista Torricelli, sentendo approssimarsi la morte immatura che doveva vietargli di dar l'ultima mano ai lavori intrapresi, elesse suo esecutore testamentario il fido amico Lodovico Serenai, incaricandolo specialmente di adoperarsi a che Bonaventura Cavalieri o Michelangelo Ricci curassero la pubblicazione delle sue opere inedite. La morte del primo, sopravvenuta poco dopo, e la rinuncia del secondo, costrinsero il Serenai a rivolgersi ad altri; e, dopo avere invano bussato ad altre porte, non senza stento riuscì ad indurre Vincenzo Viviani ad assumere l'incarico. È pur noto che questi lasciò delle indubbie prove di essersi attivamente occupato di soddisfare l'ultimo desiderio del suo illustre predecessore quale matematico del Granduca di Toscana; ma, per ragioni ignote e su cui furono fatte varie supposizioni, l'opera intrapresa non fu compiuta e Lodovico Serenai scese nella tomba amareggiato dal dolore di non aver potuto ottemperare all'ultima volontà del diletto amico.

Con la morte del Serenai comincia un periodo pieno d'incertezze in cui i preziosi cimelii torricelliani subirono traversie e dispersioni, finchè, essendosi miracolosamente salvati integralmente, vennero acquistati dal Granduca di Toscana Ferdinando III, che così arricchì la sua Biblioteca Palatina di uno dei suoi preziosi orna-

Digitized by Google

menti. Annessa la Toscana al Regno d'Italia passarono alla Biblioteca Nazionale di Firenze, ove costituiscono 24 volumi della celebre collezione degli scritti dei Discepoli di Galileo.

La pubblicazione delle opere di Torricelli, dichiarata d'universale interesse dal Congresso internazionale di scienze storiche tenutosi a Roma nel 1903, venne assunta dal Municipio di Faenza, patria di quel grande, in occasione del III centenario della sua nascita. L'opuscolo che segnaliamo è l'araldo dell'edizione tanto attesa. Esso contiene, oltre, per esteso e documentata, la storia dei manoscritti più sopra compendiata, un cenno dei criteri scelti dal Prof. Vassura nell'adempiere il nobile còmpito assegnatogli dalla sua patria ed un Indice cronologico del Carteggio scientifico del Torricelli. Da quel cenno risulta che la progettata edizione comprenderà tre volumi: il I. destinato accogliere le *Opere geometriche;* il II. le *Lezioni accademiche,* la *Meccanica* e gli *Scritti varii;* il III il *Carteggio scientifico.* Questo attualmente comprende 207 lettere; ma altre è probabile possano aggiungersene se chi è in grado di farlo non rimarrà sordo od indifferente all'appello che il Prof. Vassura ripete e di cui il *Bollettino* di buon grado si fa eco: chi possiede lettere e documenti concernenti il sommo Faentino, si affretti a farli conoscere, sedotto dalla prospettiva di contribuire a far rifulgere in tutto il suo splendore la gloria di colui che ai contemporanei apparve come un nuovo Galileo.

G. L.

T. L. HEATH. — *The thirteen books of Euclid's Elements translated from the Text of Heiberg with Introduction and Commentary.* Cambridge, University Press 1908, 8° grande, Vol. I p. X+424, Vol. II p. 436, Vol. III p. 554 [Prezzo dei tre volumi legati sh. 42].

Riuscirebbe senza dubbio istruttivo ed interessante uno studio comparativo intorno alle professioni esercitate da coloro a cui le scienze esatte sono debitrici di qualche memorabile progresso o di qualche scritto importante. Chi intendesse di compierlo in modo esauriente dovrebbe risalire agli albori della civiltà per sorprendere Talete nell'atto di far incetta di torchi da olio per averne il monopolio durante un raccolto di ulive, che egli prevedeva abbondantissimo; lo dovrebbe se non altro per dedurne come il saggio di Mileto non dedicasse tutta la propria attività cerebrale alle speculazioni di scienza pura. Egli dovrebbe volger poi lo sguardo a Leonardo Fibonacci, modesto mercante di Pisa a cui l'Europa deve la prima conoscenza dell'algebra; proseguendo le proprie indagini egli troverebbe un avvocato divenuto poi magistrato, F. Viète, assumente

Digitized by Google

l'ufficio di capo degli algebristi francesi; simile in ciò al grande Fermat, consigliere al parlamento di Tolosa. Egli dovrebbe poi notare come matematici di professione non furono nè Bachet de Méziriac, nè Pascal, nè Descartes, nè Nepero, nè Leibniz, quantunque alle investigazioni di matematica pura abbiano consacrato il fior fiore delle loro forze. Di mano in mano che ci si approssima all'epoca moderna i fatti di tale specie diventano sempre più rari, per effetto della specializzazione sempre più diffusa; essi però non scompaiono totalmente, come provano gli esempi offerti da Bessel, che avvertì l'irresistibile fascino di Urania mentre era commesso-viaggiatore, e di Genocchi, Cayley e Sylvester, che scrissero buona parte dei loro lavori mentre erano inscritti nell'albo degli avvocati.

Queste osservazioni si affacciarono alla nostra mente al ricevere la monumentale opera di cui tratta il presente articolo, chè essa è dovuta ad un alto funzionario del ministero delle finanze inglese, il quale suol dedicare tutte le ore che gli lascia libere il proprio ufficio a studiare, interpretare, commentare le produzioni matematiche dell'antica Grecia. Dopo Diofanto, Apollonio e Archimede (v. *Bollettino,* T. II, 1899, p. 13-14), egli consacrò le sue fatiche al sommo legislatore della geometria elementare; impresa questa ben più ponderosa delle precedenti, ma che prometteva una messe ben più ricca di risultati importanti ed utili. Commenti agli ***Elementi di Euclide*** non mancano si può dire in alcuna letteratura, meno che nelle altre in quella inglese; ma tutti (ad eccezione forse di quello di M. Simon, il quale è però parziale) sono piuttosto filosofici e filologici che scientifici; onde l'opera progettata dall'Heath ed ora portata a buon termine si presentava come di opportunità indiscutibile, data l'enorme quantità di indagini fatte sopra i fondamenti della geometria nel secolo testè decorso. Essa si apre con un'interessantissima introduzione di circa 150 pagine, divisa in nove Capitoli. I primi otto trattano i seguenti temi: Euclide ed i suoi traduttori; altre opere di Euclide; commentatori greci all'infuori di Proclo; Proclo e le fonti a cui ricorse; il testo; gli scolii; Euclide presso gli Arabi; principali traduzioni ed edizioni. L'ultimo capitolo della Introduzione, come più lungo, venne diviso in sette paragrafi, che trattano rispettivamente i seguenti soggetti: natura degli ***Elementi;*** ***Elementi*** anteriori ad Euclide; i principii fondamentali; teoremi e problemi; divisione formale di una proposizione; altri termini tecnici; le definizioni. Segue la traduzione degli ***Elementi*** secondo il testo heiberghiano, ogni proposizione essendo seguita da esaurienti osservazioni sullo stato del testo, le varianti e le osservazioni ed aggiunte a cui dette luogo. Ogni volume poi si chiude con un indice dei termini greci ed uno delle materie trattate e nomi citati; due analoghi indici chiudono l'intera opera.

Uno scritto qual è quello dell'Heath si ribella a chiunque tenti

Digitized by Google

di descriverne partitamente il contenuto; onde ci limiteremo ad aggiungere alle precedenti notizie che l'A. mostra di conoscere tutto ciò che concerne la materia trattata e che in ogni pagina dà prova di profondità ed acume veramente invidiabili; sicchè la sua grande opera non solo presterà inestimabili aiuti ai futuri storici della matematica greca, ma si presenta come un ausiliare indispensabile a chiunque voglia esporre la geometria elementare secondo le idee del grande geometra greco, idee che, malgrado gli sforzi degli oppositori, dominano tuttora e probabilmente regneranno sempre

G. L.

H. BURCKHARDT. — ***Entwickelungen nach oscillirenden Functionen und Integration der Differentialgleichungen der mathematischen Physik*** (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, X Bd.) [Prezzo Mk. 30].

Il *Bollettino* verrebbe meno al suo còmpito se non segnalasse il felice compimento della I Parte (1) del colossale « Bericht », la cui pubblicazione occupò non meno di otto anni, il cui testo comprende pag. XII+1804, le cui note a piede di pagina ascendono al rispettabile numero di 9146. Il tema trattato dall'A., mentre da un lato tocca le più elevate e controverse questioni dell'Analisi, dall'altro ha profonda attinenza con un grande numero di rami della Fisica (inteso tale vocabolo nel suo significato più ampio), onde non deve recar meraviglia se l'A., nello svolgerlo, sia stato indotto a sviluppi di vario genere e di grande ampiezza. Per dar una pallida idea dei campi da lui percorsi invitiamo i lettori a gettare uno sguardo sopra l'indice della materie trattate, che qui per comodità riproduciamo.

Costituzione del Metodo degli sviluppi in serie nella risoluzione dei problemi di Fisica. I. Le vibrazioni principali d'un sistema di masse. II. La discussione sul problema delle corde vibranti. III. Lo sviluppo delle funzioni *analitiche* in serie trigonometriche armoniche. IV. Varii fondamenti di altri sviluppi in serie. V. La forma dei corpi celesti e lo sviluppo secondo funzioni sferiche. VI. Integrazione di equazioni a derivate parziali col mezzo d'integrali definiti. VII. La teoria della propagazione del calore di Fourier e la rappresentazione delle funzioni *arbitrarie* col mezzo di serie procedenti secondo funzioni oscillanti. VIII. Rappresentazione di funzioni arbitrarie mediante integrali definiti; perfezionamento degli sviluppi in serie. IX. I principii della teoria dell'elesticità e l'integra-

(1) La II Parte verrà pubblicata in epoca forse assai remota; onde non giudichiamo del caso di attenderla per segnalare ai nostri lettori il prezioso acquisto già fatto dalla letteratura matematica.

Digitized by Google

zione delle frazioni simultanee e derivate parziali. X. Influenza della teoria delle funzioni di variabili complesse. XI. Sviluppi in serie generali e rappresentazioni col mezzo d'integrali. XII. Sviluppo di funzioni a più variabili secondo i prodotti di funzione ad una variabile XIII. Introduzione della fisica matematica in Inghilterra. XIV. Altre ricerche sopra la distribuzione del calore e dell'elettricità.

Frutto di studi diretti sopra le fonti, quest'opera è una vera miniera d'informazioni esatte, alcune delle quali possiedono un non comune valore riferendosi a scritti estremamente rari; onde essa è una preziosa fonte di notizie, non priva di suggestività, non rare essendo le occasioni in cui il matematico prende il posto dell'erudito per segnalare punti di dottrina da chiarire e ricerche speciali da compiere. Ciò nonostante, il carattere principale del lavoro del Prof. Burckhardt è quello di opera di consultazione; onde non sarà mai abbastanza lamentato che la mano dell'A. sia caduta stanca sopra le pagine vergate, prima di avere scritto un indice dei nomi e delle cose, la cui somma utilità non ha bisogno di essere dimostrata. E siccome l'A. sembra far intendere che l'uno l'altro serviranno di complemento alla progettata II Parte, così vi è un nuovo potente argomento per desiderare vivamente che egli non la faccia attendere troppo a lungo.

G. L.

D. E. Smith. — *Rara arithmetica. A catalogue of the arithmetics witten before the yean MDCI, with a description of shore in the Library of* George Arthur Plimton *of New York.* Ginn and Co. Boston and London 1908, 8o gr., p. XIII+507 [Prezzo 21 sh.].

L'esodo verso le più opulenti città della grande Repubblica nord-americana di preziosi cimelii, di edizioni rare e di manoscritti di grande valore è un fatto noto ed a cui non potrebbero opporsi che gli istituti o i privati di potenza economica equiparabile a quella delle Università o dei miliardari degli Stati Uniti. Ma poichè sforzi in tale senso non sono accaduti in passato nè è presumibile avvengano in avvenire, così bisogna rallegrarci di una pubblicazione, qual è quella che oggi annunciamo, destinata a descrivere il contenuto e riprodurre le esterne fattezze delle opere conservate in una biblioteca così ricca come quella del sig. Plimpton.

Il catalogo ragionato ed illustrato di una biblioteca scientifica, compilato da persona competente in materia, se non appartiene alla categoria degli scritti prettamente storici, fa certamente parte degli ausiliari della storia, in quanto permette di famigliarizzarsi con le opere la cui comparsa ebbe valore di avvenimento. Ciò vale tanto più per l'opera del chiaro Professore dell'Università di New York in quanto che egli di ognuna delle opere descritte

Digitized by Google

ebbe cura d'indicare il contenuto ed il valore e con opportune notizie colmò le lacune che inevitabilmente presenta una collezione di libri, per quanto prossima alla completezza ideale. L'opera in discorso presenta uno speciale interesse agli Italiani perchè è nota la parte preponderante rappresentata dal « bel paese » nella formazione e diffusione dei metodi aritmetici ed è pur nota l'eccellenza che ben presto raggiunsero i torchi italiani, non appena fu nota fra noi la invenzione dei caratteri mobili.

Non meno di 214 figure in fototipia riproducono il frontispizio o qualche pagina delle trecento opere pubblicate nel periodo 1475-1600 e possedute dal Plimpton; ai manoscritti si riferiscono altre 32 nove bellissime tavole litografate; notiamo che nell'edizione di lusso della stessa opera (pubblicata prima e di cui alcuni fogli vennero mostrati ai cemponenti la Sezione storica del IV Congresso interna zionale dei matematici) alcune di tali tavole sono in cromolitografia. Chiudono tutta l'opera due indici: uno delle date dei libri e manoscritti enumerati, l'altro dei nomi e delle cose notevoli.

G. L.

Algebra

S. PINCHERLE. — *Lezioni di Algebra complementare* dettate nella R. Università di Bologna e redatte ad uso degli studenti. *Teoria delle equazioni.* Bologna, Zanichelli 1909, p. II+358 [Prezzo Lire 10].

Con questo volume dedicato alla *Teoria delle equazioni* l'A. conduce a termine la redazione delle sue *Lezioni di Algebra complementare,* di cui aveva pubblicato nel 1906 il primo volume, relativo all'*Analisi algebrica* (v. *Bollettino,* T. X, p. 57).

In questo volume si possono distinguere tre parti: una prima parte di carattere introduttivo (Cap. XVI-XIX, pag. 1-105), una seconda sulle teorie algebriche propriamente dette (Cap. XX-XXVII, pag. 106-280) e infine una terza sul calcolo approssimato delle radici di un'equazione algebrica (Cap. XXVIII-XXIX, pag. 281-335).

Nei quattro Capitoli introduttivi l'A., dopo aver dato una rapida trattazione degli elementi dell'Analisi combinatoria e delle sue principali applicazioni (somme di potenze simili dei numeri naturali, potenza del polinomio, problemi elementari di calcolo delle probabilità) svolge i principi della teoria delle sostituzioni e sviluppa largamente la teoria dei determinanti e delle forme ed equazioni lineari.

Si passa quindi, come già dicemmo, alle teorie algebriche propriamente dette, delle quali è data qui una trattazione che, tanto

Digitized by Google

per la semplicità e la limpidezza dell'ordine logico, quanto per la chiarezza e l'eleganza della forma, appare singolarmente notevole. Prese le mosse dal teorema del D'Alembert, del quale è qui data la dimostrazione del Lipschitz, l'A., occupandosi anzitutto delle teorie algebriche che potrem dire formali, tratta successivamente delle *funzioni simmetriche,* del *risultante e della eliminazione,* delle *radici multiple e del discriminante,* e si indugia, in un capitolo notevolissimo, sulla teoria delle *funzioni razionali fratte,* cui spesso non viene dato nei corsi di algebra il debito rilievo. Qui la teoria degli sviluppi in serie ricorrenti di codeste funzioni è costruita sulla base di una discussione elementare completa delle soluzioni delle equazioni lineari alle differenze finite a coefficienti costanti. Dopo ciò l'A. studia le principali trasformazioni di un'equazione algebrica, riconnettendovi un cenno sulla teoria delle forme invariantive associate ad una forma algebrica, e passa quindi ad occuparsi della risolubilità algebrica delle equazioni. Tratta anzitutto delle equazioni binomie e delle equazioni cubica e biquadratica, per le quali indica i classici metodi di risoluzione, e da ultimo, in un capitolo, in cui quasi direi si rivelino in modo saliente quei caratteri di semplicità e di limpidezza che informano tutto il libro, pone i concetti di campo di razionalità e di reducibilità di un'equazione algebrica, assegna alcune fra le più semplici proprietà delle equazioni risolubili algebricamente, e infine, sulla base della classica dimostrazione dell'Abel, stabilisce il teorema del Ruffini.

Come dicemmo dapprincipio gli ultimi due capitoli trattano della separazione delle radici di un'equazione algebrica (teoremi del Rolle, di Budan-Fourier, di Cartesio, dello Sturm), e del loro calcolo per approssimazione (radici razionali, radici irrazionali determinate coi metodi delle corde, delle tangenti di o Newton, dello Horner e del Lagrange, radici complesse); e il libro si chiude con un minuto e completo indice analitico.

La materia di queste lezioni si svolge entro i limiti tradizionali dei nostri corsi di algebra per il primo biennio; ma pur non uscendo da codesti confini, l'A. ha lumeggiato con cura sapiente i concetti generali e ha messo in luce, ogni qualvolta se ne presentava il destro, quelle considerazioni sintetiche che potevano aprire l'adito a qualche veduta, che trascendesse il ristretto campo elementare. A questo notevole carattere di equilibrata elevatezza si associano, come già accennammo, un ordine logico semplice e serrato ed una inappuntabile perpiscuità di forma; talchè queste Lezioni, nate dal connubio di una elevata concezione teorica e di una lunga amorosa esperienza della scuola, riusciranno non soltanto un'ottima guida pei giovani che intendono iniziarsi a queste teorie, ma altresì una utile lettura per gli esperti della materia.

U. AMALDI

Digitized by Google

K. HENSEL. — *Theorie der algebraischen Zahlen.* I Bd. Leipzig und Berlin, Teubner 1908, I Band, 8°, pag. XI+349 [Prezzo Mk. 14].

Nell'opera, di cui ci sta dinanzi il primo volume, K. Hensel sviluppa sistematicamente la nuova teoria dei numeri algebrici da lui concepita, e nota già in parte per alcune memorie inserite nei *Math. Ann.,* nel *Journ. für Math.* e nel *Jahresb. d. deutsch. Math. Ver.* L'importanza dell'argomento, e la poca diffusione che hanno avuto sinora, per quanto sappiamo, le fondamentali ricerche di Hensel, ci inducono a dare della recente sua opera un riassunto alquanto largo e tale da permettere al lettore di vedere, almeno nelle sue linee caratteristiche, l'elegante edificio innalzato dal nostro autore.

La differenza essenziale che presenta l'insieme dei numeri interi di un corpo algebrico rispetto all'insieme dei numeri razionali interi sta, come è ben noto, in ciò, che per certi corpi algebrici la decomposizione di un numero in fattori non ulteriormente decomponibili può farsi in più modi diversi, ossia che esistono numeri non scomponibili in fattori e non aventi tuttavia le proprietà caratteristiche dei numeri primi ordinari. Di qui l'impossibilità di estendere, senz'altro, ai corpi algebrici la teoria della divisibilità; di qui gli artificii diversi escogitati da Kummer, Dedekind, Kronecker per rendere possibile tale estensione. Non è qui il luogo di mettere in luce il nesso intimo esistente fra questi vari metodi; a noi importa notare che quello di Hensel può considerarsi come il risultato di una fusione di essi, combinata con l'uso di un nuovo e fecondo principio, che permette di raggiungere una notevole semplicità ed eleganza: quello dello sviluppo dei numeri secondo le potenze crescenti di un numero primo.

A tale principio fu condotto Hensel dal confronto fra i procedimenti dell'aritmetica e quelli dell'analisi. Nell'analisi si fa uso simultaneo degli sviluppi d'una funzione in serie di potenze negli intorni dei varii punti del piano, sviluppi che non solo possono dedursi l'uno dall'altro, ma possono anche ottenersi indipendentemente, quando, per esempio, la funzione sia definita da un'equazione algebrica o differenziale. Invece nello studio dei numeri si considera unicamente la loro rappresentazione in forma decimale, che corrisponde in qualche modo allo sviluppo d'una funzione in serie di potenze decrescenti della variabile nell'intorno del punto all'infinito. Le maggiori difficoltà che presenta l'aritmetica di fronte all'analisi sono pertanto quelle stesse che si incontrerebbero anche in questa, se tutte le proprietà delle funzioni si volessero dedurre esclusivamente dal loro sviluppo nell'intorno del punto $z = \infty$; e, per converso, diverrà molto più agevole la ricerca delle verità aritmetiche, se per ciascun numero potremo disporre d'una infinità di sviluppi

Digitized by Google

diversi. Ora, scelto un numero primo qualunque p, si può appunto (Cap. 1) mettere ogni numero intero e positivo A sotto la forma *(rappresentazione di A nell'intorno di p* o *numero p-esimale)*:

$$A = a_0 + a_1\, p + a_2\, p^2 + \ldots + a_r\, p^r,$$

dove $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_r$ sono numeri interi nulli o positivi, minori di p; tale rappresentazione è unica, e si denota brevemente con:

$$A = a_0, a_1, a_2 \ldots ar.$$

I numeri:

$$A_0 = a_0, \qquad A_1 = a_0, a_1, \qquad A_2 = a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots$$

si dicono *valori approssimati* di A; l'*ordine* di A è il minimo degli indici dei coefficienti a_i non nulli, ossia l'esponente della massima potenza di p che divide esattamente A. La somma e il prodotto di due numeri dati mediante le loro rappresentazioni p-esimali si ottengono con regole del tutto analoghe a quelle dell'aritmetica ordinaria, però procedendo da sinistra a destra. Anche la differenza può ricavarsi nello stesso modo; però, se il minuendo è minore del sottraendo, l'operazione non ha mai fine. Ed ecco presentarsi così la necessità di ampliare il campo dei numeri p - esimali includendovi anche i numeri della forma:

$$a_0 + a_1\, p + a_2\, p^2 + \ldots.,$$

dove la serie si prolunga all'infinito. Per rendere possibile anche la divisione (Cap. 2), bisogna prendere in considerazione il tipo ancora più generale:

$$\frac{a_{-r}}{p^r} + \frac{a_{-(r-1)}}{p^{r-1}} + \ldots + \frac{a_{-1}}{p} + a_0 + a_1\, p + a_2\, p^2 + \ldots..$$

Quanto ai coefficienti, si può ammettere che essi non siano necessariamente compresi fra 0 e p − 1 *(forma non ridotta)*, ed anche che siano fratti, purchè il denominatore non sia multiplo di p. L'insieme dei numeri così definiti costituisce il *corpo* K (p); esso contiene il corpo K (1) dei numeri razionali, ed è più ampio di questo, giacchè un numero di K (p) è un numero razionale sempre e soltanto se la serie dei suoi coefficienti è finita o periodica. Un numero p-esimale si dice *intero*, se i suoi coefficienti d'indice negativo sono nulli; un numero intero è un'*unità*, se a_0 non è nullo nè multiplo di p. Due numeri p - esimali sono *eguali*, se i loro coefficienti corrispondenti sono congrui rispetto a p; ogni numero è uguale ad uno e ad un sol numero *ridotto*.

Digitized by Google

Anche un numero irrazionale o complesso è suscettibile di uno sviluppo della forma considerata; questo può costituire una serie convergente, ma nessuna relazione v'ha tra la somma di tale serie e il valore del numero da essa rappresentato; anzi può dimostrarsi che, dati un numero reale o complesso B e un numero p-esimale ridotto B, si può costruire uno sviluppo convergente eguale a B ed avente per somma B. In particolare, se B è razionale, può aversi uno sviluppo p-esimale avente per somma B, cioè rappresentante B tanto in grandezza che nell'intorno di p; esso dicesi *la rappresentazione p-esimale* di B. Se fra gli sviluppi di più numeri razionali x, y, z . . . sussiste una relazione razionale a coefficienti razionali:

$$\varphi(x, y, z \ldots) = 0,$$

la stessa relazione sussiste considerata come equazione nell'intorno di p (cioè come congruenza rispetto a qualunque potenza di p), e viceversa.

I concetti svolti per il corpo K (p) possono assai facilmente applicarsi a quello K (p, x) costituito da tutte le funzioni razionali di x a coefficienti p-esimali (Cap. 3, 4); esso contiene il corpo K (1, x) delle funzioni razionali di x a coefficienti razionali, ed è chiaro che ad esso sono estendibili tutte le teorie e i procedimenti algebrici involventi soltanto le operazioni razionali: divisibilità, risultante, discriminante, scomposizione d'una frazione intera in fattori irriducibili. Questa scomposizione si riduce alla scomposizione rispetto al modulo p^{d+1} della funzione intera ordinaria costituente l'approssimata d'ordine d della data funzione p-esimale; d è l'ordine del discriminante della funzione stessa. Anche il calcolo approssimato delle radici d'un'equazione può farsi con un metodo del tutto analogo a quello di Newton. Un interesse particolare presenta lo studio delle radici $(p-1)$-esime dell'unità, cioè delle radici dell'equazione $x^{p-1} - 1 = 0$ considerata nell'intorno di p; esse hanno proprietà simili a quelle delle ordinarie radici dell'unità, e si può stabilire tra le prime e le seconde una corrispondenza tale, che ogni relazione sussistente fra le une sussista anche fra le altre.

Come dal corpo K (1) si è ottenuto il corpo K (p), così dal corpo algebrico K (α) di grado l definito dal numero algebrico α può ottenersi il corpo K (p, α) (Cap. 5, 6). Dicasi *razionale intero rispetto al modulo p* ogni numero razionale il cui denominatore non è multiplo di p, *algebrico intero rispetto al modulo p* ogni numero che soddisfa un'equazione algebrica di cui il primo coefficiente è 1 e gli altri sono razionali interi rispetto al modulo p. Può trovarsi in infiniti modi un *sistema fondamentale* di l numeri del corpo K(α) interi rispetto al modulo p mediante il quale è esprimibile linearmente

Digitized by Google

ogni altro numero della stessa natura. Se $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \ldots, \gamma^{(l)}$ è un tal sistema, e con ε si denotano dei numeri della forma $\sum_{i=1}^{l} e_i \gamma^{(i)}$, dove i coefficienti e_i sono numeri della serie 0, 1, . . ., p−1, l' insieme delle espressioni *(numeri algebrici p-esimali)*:

$$\gamma = \varepsilon^{(r)} p^r + \varepsilon^{(r+1)} p^{r+1} + \ldots .,$$

dove r è un numero intero positivo, nullo o negativo, costituisce il corpo K(p, α). A questi nuovi numeri possono estendersi molte delle proprietà dei numeri algebrici ordinari. Particolare ad essi è la seguente: Dei due numeri γ, $\frac{1}{\gamma}$ uno almeno è intero rispetto al modulo p. Se tanto γ che $\frac{1}{\gamma}$ sono interi, γ dicesi un'*unità*. Tutte e sole le unità hanno per *norme* delle unità (razionali). Il numero p non è un'unità, perchè la sua norma è p^l. Se vi sono numeri la cui norma sia rispetto a p d'ordine minore di l, p non è primo nel nuovo campo; detto f l'ordine positivo minimo delle norme, i numeri aventi norme del tipo $p^f E$, dove E è un'unità, sono primi nel campo K (p, α); essi sono tutti tra loro *equivalenti* (cioè i loro quozienti sono unità) e possiedono tutte le proprietà dei numeri primi ordinari. Indichiamo uno qualunque di essi con π; f è il *grado* di π; esso è un divisore di l, ed $e = \frac{l}{f}$ è l'*ordine* di π. Ogni numero può svilupparsi nella forma:

$$\varepsilon^{(r)} \pi^r + \varepsilon^{(r+1)} \pi^{r+1} + \ldots .,$$

dove i numeri ε appartengono ad un insieme di p^f numeri incongrui rispetto a π. In generale $e = 1$, ed allora p è primo nel corpo considerato; se $e > 1$, p si dice un *numero di diramazione*, e si ha $p = \pi^e \eta$, dove η è un'unità, quindi $\pi = p^{\frac{1}{e}} \eta^{-\frac{1}{e}}$, dove $\eta^{-\frac{1}{e}}$ è ancora un'unità, ma non appartiene a K (α).

Il teorema di Gauss sussiste anche per le equazioni algebriche a coefficienti razionali p-esimali (Cap. 7). Se l'equazione fondamentale $K(\alpha) = 0$ a cui soddisfa α si scompone nell'intorno di p in più fattori irriducibili, l'equazione a cui soddisfa un numero p-esimale qualunque γ del corpo si scompone in altrettanti fattori irriducibili o potenze di polinomi irriducibili; se $\pi^{(1)}, \pi^{(2)}, \ldots$ sono i numeri primi corrispondenti rispettivamente a questi fattori, $r^{(1)}, r^{(2)}, \ldots$ gli ordini dei vari gruppi di radici rispetto a questi numeri, si dice che γ ha il divisore $\pi^{(1)r^{(1)}} \pi^{(2)r^{(2)}} \ldots$. Ogni numero algebrico ha solo un numero finito di divisori primi, ossia è equivalente ad un prodotto finito $\pi^r \xi^s \ldots$.

Digitized by Google

Si presenta ora il problema fondamentale (Cap. 8), di assegnare l'insieme di tutti i numeri di K (α) i quali ammettono un medesimo divisore. È facile però dimostrare che basta trattare la questione per il caso in cui il divisore è semplicemente una potenza di un numero primo. La risoluzione del problema si fonda essenzialmente su questa osservazione, che le proprietà che possiedono i numeri razionali p-esimali rispetto al numero primo razionale p si mantengono per i numeri algebrici p-esimali rispetto al numero primo algebrico π. Così il teorema di Fermat trova il suo analogo nella teoria dei numeri algebrici, il che permette di formare un sistema completo di p^f numeri incongrui rispetto al modulo π, se f è il grado di π; anzi come tali possono scegliersi, oltre allo zero, le potenze prima, seconda, . . ., (p–2)-esima di una radice primitiva η dell'equazione p-esimale:

$$x^{p^f-1}-0.$$

Qualunque numero di K (α) può svilupparsi, e in modo unico, nell'intorno del numero primo π in serie di potenze ascendenti di π i cui coefficienti sono nulli o potenze di η. L'aggiunzione di η al campo di razionalità permette di scomporre l'equazione irriducibile di grado l a coefficienti razionali p-esimali a cui soddisfa un numero β del corpo K (α) in f equazioni coniugate irriducibili di grado $e = \frac{l}{f}$; corrispondentemente le l radici si scompongono in f cicli di e elementi, e le radici di un medesimo ciclo si ottengono da una di esse sostituendo nel suo sviluppo in serie di potenze di π al numero π i suoi coniugati, mentre i vari cicli si deducono da uno di essi sostituendo ad η nei coefficienti η^p, η^{p^2} . . ., $\eta^{p^{f-1}}$.

I risultati ottenuti permettono (Cap. 9) di costruire un sistema fondamentale rispetto al modulo π, e di determinare la massima potenza di π contenuta nel discriminante di tale sistema. Di qui si passa facilmente a costruire un sistema fondamentale per tutti i multipli di una data potenza π^r di p, a stabilire l'importante teorema, che ogni corpo K (α) possiede un numero finito di divisori di diramazione, e a determinare l'espressione del discriminante del corpo; e finalmente si può ottenere un sistema fondamentale atto a rappresentare l'insieme di tutti i multipli di un dato divisore δ, ossia l'*ideale* I (δ).

Lo studio ulteriore dei numeri algebrici richiede (Cap. 10) l'uso delle forme a variabili indeterminate. Ogni sistema fondamentale $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots; \xi^{(l)}$ del corpo K (α) dà luogo ad una *forma fondamentale:*

$$w = \sum_{i=1}^{l} u_i \, \xi^{(i)},$$

Digitized by Google

dove i coefficienti u_i sono numeri razionali arbitrari; l'equazione irriducibile a cui soddisfa w è l'*equazione fondamentale*, e il discriminante di questa è il *discriminante fondamentale*. Esso è il prodotto del discriminante del corpo per una certa forma a coefficienti interi; i coefficienti non hanno alcun divisore comune, ma può accadere malgrado ciò che i valori che la forma assume per tutti i possibili valori delle u abbiano un divisore comune. Affinchè un numero primo p non abbia tale proprietà, è necessario e sufficiente che possa determinarsi un numero intero del corpo $K(\alpha)$ tale che il quoziente del suo discriminante per quello del corpo non sia multiplo di p. Un numero di questa natura dicesi *regolare nell'intorno di p*; e la condizione necessaria e sufficiente affinchè per un numero primo p non esistano numeri regolari è costituita da un sistema di diseguaglianze, di cui una almeno deve essere soddisfatta. Ora (Cap. 11), se esiste nel corpo considerato un numero γ regolare nell'intorno di p, e se $F(x) = 0$ è l'equazione irriducibile a cui esso soddisfa, dalla decomposizione di $F(x)$ in fattori irriducibili rispetto al modulo p:

$$F(x) \equiv \prod_i [F_i(x)]^{e_i} \pmod{p}$$

risulta immediatamente la decomposizione del numero p nei suoi fattori primi:

$$p = \prod_i [p, F_i(\gamma)]^{e_i},$$

dove in generale con (a, b) si denota il massimo comun divisore dei numeri a, b. La cosa è meno semplice per i numeri p pei quali non esiste alcun numero regolare; in tal caso bisogna ricorrere, invece che al numero γ, alla forma fondamentale w. E non solo, come appare dalla precedente formola, ogni numero primo, ma anche ogni divisore δ del corpo $K(\alpha)$ può rappresentarsi come il massimo comun divisore di due numeri β, γ:

$$\delta = (\beta, \gamma) = \beta + u\gamma;$$

anzi uno dei due numeri può scegliersi ad arbitrio fra i multipli di δ. Dopo ciò si possono estendere agli ideali i principali teoremi relativi ai campi di numeri algebrici interi.

Tolta pertanto ogni differenza fra il corpo dei numeri razionali e un corpo algebrico qualunque, può concludersi (Cap. 12) che: Tutti i numeri algebrici sono sviluppabili in serie p-esimali convergenti, in modo che ogni relazione a coefficienti razionali fra esse esistente in senso ordinario abbia luogo anche nell'intorno di p, e viceversa.

Ora ogni equazione ordinaria fra numeri algebrici esprime un

Digitized by Google

teorema algebrico, ogni equazione p-esimale rappresenta una verità aritmetica; il risultato finale ottenuto permette di far corrispondere ad ogni teorema algebrico un teorema aritmetico e viceversa. L'A. si riserva di sviluppare questa corrispondenza nel secondo volume della sua opera e di applicarla a speciali corpi algebrici.

G. VIVANTI

Teoria degli aggregati

A. SCHOENFLIES. — *Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten.* Bericht erstattet der deutschen Mathematiker-Vereinigung. Zweiter Teil. Leipzig, Teubner, 1908, 8o. pag. X+331 [Prezzo Mk. 12].

Nel 1900 Schoenflies pubblicava la prima parte del suo *Rapporto* sulla teoria degli aggregati, comprendente la teoria generale e le sue applicazioni analitiche, riservando alla seconda parte le applicazioni geometriche. Ma queste erano, a quell'epoca, così limitate e così imperfette, che l'A. stimò meglio attendere; ed all'attesa passiva preferì il concorso attivo alla creazione di ciò che mancava, sicchè questo secondo volume, uscito ad otto anni di distanza dal primo, è in non piccola parte opera personale dell'A. al cui nome devono però associarsi quelli di Arzelà, Ascoli, Baire, Borel, Fréchet, Hilbert, Lebesgue, Osgood, Peano, Scheeffer, Volterra, Young ed altri. Intanto nel lungo intervallo anche la teoria generale degli aggregati si accresceva di importanti contributi; ed a questi l'A. ha opportunamente dedicati i primi tre capitoli del suo lavoro.

Cominciando pertanto dalle generalità (C. 1), egli espone alcune ricerche che hanno diretto rapporto con due questioni fondamentali tuttora insolute, e cioè:

Se possano assegnarsi due numeri cardinali trasfiniti a, b tra i quali non abbia luogo alcuna delle tre relazioni:

$$a = b, \quad a > b, \quad a < b;$$

Se vi sia qualche aggregato che non possa disporsi in serie ben ordinata.

Il fatto che tali possibilità non possano sinora escludersi conduce a cercare sotto quali condizioni due numeri cardinali sieno ***paragonabili*** (cioè tali che tra essi abbia luogo una delle predette relazioni), e quali proprietà speciali abbiano i numeri cardinali degli aggregati i cui elementi possono disporsi in serie ben ordinata (ossia i numeri *alef*).

Digitized by Google

Le due questioni sono in istretto rapporto fra loro, giacchè, risolta negativamente la seconda, cadrebbe anche la prima. Esse fanno parte di un insieme di questioni filosofico-matematiche che in questi ultimi anni sono state largamente discusse, ed alle quali Schoenflies dedica la fine del primo capitolo.

Il C. 2 tratta delle classi ordinate e dei tipi d'ordine lineari; alcuni di questi ultimi, per avere certe caratteristiche comuni col continuo ordinario, hanno meritato il nome di *continui d'ordine superiore.* Un tipo speciale di continuo lineare è quello di Veronese, che viene qui estesamente studiato dal punto di vista della teoria degli aggregati.

Il C. 3 considera in particolare gli aggregati di punti; specialmente importanti sono le parti di esso che si riferiscono all'estensione delle proprietà note agli aggregati di punti posti in uno spazio ad infinite dimensioni, ed alla grandezza degli aggregati.

Col C. 4 si entra nell'argomento proprio del volume. Si tratta qui di chiarire, senza far uso di mezzi analitici, i concetti fondamentali della geometria. Il punto di partenza è il teorema seguente, che, assunto come assioma per il triangolo, può dimostrarsi per ogni altro poligono: Ogni poligono P divide il piano in due parti A, I, per modo che due punti di A, o di I, possono congiungersi con una spezzata appartenente tutta ad A, o rispettivamente ad I, mentre ogni spezzata che congiunge un punto di A con uno di I ha almeno un punto comune con P.

Detta poi *figura poligonale* una figura formata dall'unione di più poligoni, si costruisce a questo modo la figura poligonale II *approssimante a distanza* ε un dato aggegato limitato di punti T: Si imagina il piano ricoperto da una rete di quadrati di lato $\frac{\varepsilon}{2}$, e si determina l'insieme dei quadrati della rete ciascuno dei quali, insieme agli 8 che lo circondano, non contiene nè nell'interno, nè sul contorno punti di T; il contorno di questo insieme di quadrati costituisce la figura poligonale II.

Per mezzo dei poligoni approssimanti si definisce l'*ordine di connessione* di un *campo,* o continuo non chiuso.

Dal concetto di poligono si passa immediatamente a quello di *curva chiusa;* con tal nome si designa un insieme C di punti chiuso e limitato, che divide il piano in due campi I, A, per modo che ogni punto di C è punto limite tanto di I che di A. Le proprietà dei poligoni si estendono alle curve chiuse con poche variazioni; soltanto, oltre le ordinarie spezzate, conviene considerare anche quelle composte di un numero infinito di segmenti aventi un unico punto limite.

L'uso delle figure approssimanti serve anche opportunamente per lo studio degli aggregati perfetti. Tali aggregati possono essere

Digitized by Google

di due specie, secondochè contengono o no continui *isolabili*; nel primo caso si può con una serie finita o numerabile di operazioni togliere successivamente dei continui isolabili, sino ad avere come residuo un insieme nullo o un insieme della seconda specie.

Si presenta ora (C. 5) la questione, quali tra i concetti geometrici fondamentali siano invarianti rispetto all'insieme G delle trasformazioni biunivoche e continue, e quali lo sieno anche rispetto all'insieme Γ delle trasformazioni univoche e continue. Tali sono, non solo rispetto a G ma anche rispetto a Γ, il concetto di punto limite (e quindi quelli di insieme chiuso e di insieme perfetto), e quello di insieme connesso; lo sono rispetto a G soltanto i concetti di curva chiusa, di campo semplicemente connesso e di dimensione. Le trasformazioni del gruppo G hanno la proprietà di mutare un cerchio in una *curva chiusa semplice*, cioè tale che ogni suo punto può congiungersi con qualunque punto di I o di A mediante una spezzata (di un numero finito o infinito di lati) appartenente tutta ad I o rispettivamente ad A. Anche il concetto di curva chiusa semplice è invariante rispetto a G. Non lo è invece la grandezza d'un insieme, come può provarsi con esempi semplici.

Le cose dette ci offrono il modo (C. 6) di tradurre nel linguaggio della teoria degli aggregati la definizione analitica di curva continua. Le equazioni:

$$x = f(t),\ y = \varphi(t),$$

che definiscono una tale curva sotto le condizioni che f(t) e φ(t) siano funzioni continue e che t vari, p. es., da 0 ad 1, rappresentano una trasformazione biunivoca del segmento 0...1 nella curva; ne segue, per le proprietà invariantive sopra stabilite, che ogni curva continua è un insieme di punti limitato, perfetto e connesso. Lo studio geometrico delle curve continue occupa buona parte del capitolo. E quì si manifesta la differenza fondamentale che esiste tra le due definizioni, analitica e geometrica, della curva continua; la seconda considera la curva come un insieme di punti, la prima come una traiettoria. Al concetto di traiettoria, e quindi alla definizione analitica, bisogna ricorrere per stabilire la nozione ordinaria di lunghezza d'arco; l'altra definizione conduce a un risultato che in generale è diverso. Invece i poligoni approssimanti dànno luogo facilmente alla definizione di area d'una curva chiusa semplice.

Le ricerche contenute nei capitoli 4, 5 e 6 sono solo in parte suscettibili di estensione allo spazio; e sono molto interessanti le considerazioni che l'A. fa a questo proposito alla fine di ciascuno dei capitoli, perchè mettono in luce le lacune che attendono ancora di essere colmate prima che la generalizzazione possa farsi completamente.

Digitized by Google

Il C. 7 tratta degli aggregati di linee, il cui studio, inaugurato da Ascoli e Arzelà, fu di recente ripreso sotto forma più sistematica da Fréchet.

Infine il C. 8 contiene alcune aggiunte alla prima parte del *Rapporto;* fra queste hanno particolare interesse quelle che si riferiscono agli studi recenti di Lebesgue sul concetto di integrale.

Il Schoenflies dice nella prefazione, che nel primo volume del suo lavoro furono notate da varie parti delle imperfezioni, e che ciò, da un certo punto di vista, è lusinghiero per l'A., perchè mostra che la sua opera è stata letta e studiata.

La stessa sorte toccherà, non ne dubitiamo, a questo secondo volume; esso desterà l'interesse sia degli analisti che dei geometri, ed è pure probabile che coloro i quali ne faranno uno studio profondo abbiano a trovare qualche menda, qualche lacuna, qualche giudizio inesatto. A noi, che ci siamo proposti semplicemente di presentare il volume al pubblico, non può spettare il compito di un minuto esame analitico di esso; e ci limitiamo quindi ad augurarci che l'A., dopo averlo sottoposto a minuta revisione, lo rifonda, in una nuova edizione, colla prima parte dell'opera, e fornisca il suo *Rapporto* di opportuni indici, in modo di fare di esso un vero repertorio della teoria degli aggregati.

Curve speciali

H. Wieleitner. — *Spezielle ebene Kurven.* Mit 189 Figuren im Text (Sammlung Schubert LVI. 8°, p. XVI + 409. Leipzig Goeschen 1908. [Prezzo Mk. 12].

In molti dei cultori della geometria sarà tuttora vivo il ricordo della deplorevole lacuna che esisteva nella letteratura matematica per l'assenza di una esposizione esauriente delle definizioni e delle proprietà di tutte le linee piane, per qualche ragione, speciali, lacuna i cui lamentabili effetti erano percepibili ogni qualvolta accadeva di vedere qualche investigatore gettare tempo e fatica a scoprire proporzioni e risolvere problemi intorno a pretese nuove forme geometriche. Grazie ad un concorso saggiamente bandito dall'Accademia di Madrid quella lacuna si può oggi dire colmata in due modi diversi (cfr. questo *Bollettino* VI, 1903, p. 5 e IX, p. 84) onde a tutti è oggi agevole formarsi un concetto approssimativo degli innumerevoli aspetti particolari sotto cui si presentò e si svolse il concetto di curva piana.

Adunato con cura ed ordinato secondo certi criteri tutto l'immenso materiale prodotto da secoli d'ininterrotto lavoro, riesce facile ad ognuno il trascegliere quello che maggiormente giova

Digitized by Google

per formarne un tutto che, da un particolare punto di vista, si presenti come omogeneo; onde era prevedibile che alle trattazioni delle curve speciali informate alla precipua aspirazione di essere complete, dovessero seguirne altre contenenti solo quelle linee che entravano in un piano prestabilito: ed appunto di una trattazione di tal fatta che vogliamo render conto, dopo di aver notato come fosse prevedibile che il primo ad accingervisi fosse il dott. Wieleitner, il quale, dopo di avere compilata una lodevole e lodata esposizione della teoria generale delle curve algebriche (v. *Bollettino,* IX, 1906, p. 88), ha scritto parecchi interessanti lavori sopra varie linee speciali.

Come è ben naturale nel nostro resoconto non ci arresteremo ad enumerare tutte le qualità che l'A. ravvisa e dimostra nelle figure studiate, ma solo diremo quel tanto che basta perchè si vegga in qual modo egli riesce a collegare logicamente in gruppi le varie forme considerate.

Una curva potendo sempre considerarsi come trajettoria di un punto mobile con assegnate condizioni, le principali curve particolari risultano dal considerare moti speciali; e le prime quattro Sezioni dell'opera che esaminiamo concernono appunto le linee che provengono da quattro sorta di movimenti: esaminiamole separatamente.

La I è dedicata alle CISSOIDI ed ha per punto di partenza la considerazione delle curve che nascono sottraendo i raggi vettori corrispondenti di due curve riferite ad uno stesso sistema polare; sono le *curve cissoidali,* di cui l'autore determina l'ordine e le singolarità nell'ipotesi che le curve date siano algebriche ed in generale insegna la costruzione della tangente, servendosi per ciò della sottonormale polare. Come cissoidali l'A. considera anzitutto le podarie delle coniche a centro, le lemniscate di Booth e di Bernoulli. Lo studio di quest'ultima curva lo porta ad occuparsi in generale delle curve di quart'ordine dotate di tre nodi d'inflessione ed aggiungere una nuova (da lui detta « Sanduhrkurve ») a quelle speciali già note; mentre la considerazione delle isottiche delle lemniscate di Booth lo porta ad occuparsi delle spiriche di Perseo. Come le podarie delle conche a centro guidarono alla successiva considerazione di queste quartiche, la considerazione delle podarie di una parabola porta l'A. ad occuparsi dell'ofiuride. della strofoide, della cissoide e della trisettrice di Maclaurin. La considerazione della curva cissoidale di una conica ed una retta porta poi l'A. ad esporre le proprietà più salienti di altre speciali cubiche razionali cioè la trisettrice di Catalan, l'equitangenziale di una parabola la foglia di Cartesio, la cubica di Tschirnhausen, la versiera, ecc. Emerge da tutto ciò che la materia contenuta in questa sezione è ricca e ben ordinata; crediamo però che qualcuno, desideroso di vedere ciò che è più semplice esposto prima di quanto è più com-

Digitized by Google

plesso, avrebbe preferito incontrare le curve di 3° ordine prima di quelle di 4°.

La II parte, dedicata alle CONCOIDI, comincia con la determinazione dei caratteri della concoide di una linea algebrica qualsivoglia. Segue subito l'esposizione delle proprietà fondamentali della concoide di Durero e dell'ortoconcoide della retta: l'A. è così indotto a dire qualche cosa della campila d'Eudosso e dell'ovale doppia del Münger. Altre concoidi notevoli nascono da nn altro movimento in uso nella teoria delle macchine (« Schleifeschiberbewegung »): fra esse trovasi la notissima « kappa », il bicorno e parechie quartiche poliziomali simmetriche. L'A. ritorna poi all'ordine d'idee da cui prese le mosse per studiare la concoide a base circolare o lumaca di Pascal; tale curva ammette linee di eguale potenza: sono tutte ovali di Cartesio, di cui l'A. da una trattazione proporzionata alla importanza del tema. Chiude la II dell'opera in discorso un capitolo relativo alle concoidi delle coniche per posizioni speciali del polo.

Più varia è la materia svolta nella III Parte, ove trovansi adunate molte curve suscettibili di una semplice generazione cinematica. Incontriamo ivi anzitutto le asteroidi, oblique o regolari; le le podarie di queste ultime rispetto al centro essendo rose a quattro foglie, l'A. è così condotto a far cenno delle rodonee in generale. Ritornando alle asteroidi, egli ne considera le proiezioni, per far cenno delle asteroidi proiettive. L'inversione del movimento ellittico porta l'autore a considerare la cardiode, quartica triscupide che rientra nella categoria generale delle spirali sinusoidi, e che, come altri già fece, egli collega all'ipocicicide triscupide ed alle varie quartiche podarie di esse. Chiude la III Parte l'esposizione delle prime proprietà della curva di Watt e dalle altre linee connesse al movimento di un quadrilatero articolato.

Importanza ancor maggiore posseggono le curve trattate nella IV Parte, le quali traggono la propria origine dal moto di ruzzolamento di una curva sopra di un'altra; sono le trocoidi in generale ed in particolare le curve cicliche (epicicloidi ed ipocicloidi). Per investigare le proprietà di tale estesissima classe di figure l'A. premette una succosa esposizione dei principali concetti e delle formole fondamentali della geometria intrinseca; ne fa poi subito applicazione allo studio delle trocoidi in generale. I risultati ottenuti vengono illustrati sopra l'esempio delle « curve cicloidali » generate da un punto di una circonferenza ruzzolante sopra una circonferenza fissa; la considerazione dell'equazione intrinseca di tali linee, debitamente generalizzata, porta poi alle pseudocicloidi e, con un passaggio al limite, alla spirale logaritmica. Ritornando alle curve cicliche generali l'A. passa poi ad occuparsi allo studio delle epicicloidi ed ipocicloidi generali (allungate od accorciate), nonchè di alcuni loro casi speciali notevoli: incontra così le cicloidi tutte, le evolventi di

Digitized by Google

circolo, in particolare la spirale d'Archimede, ecc. Le note relazioni fra tali curve l'elica circolare retta induce l'A. a considerare altre projezioni di tali curve e s'imbatte così nella spirale iperbolica nella « complicata tractrix », nella cocleoide e nell'inversa di questa (che è la quadratrice di Ippia), nella spirale di Poinsot; riguardo alla cocleoide va notato che essa si ottiene projettando un'elica cilindrica ordinaria, non da un punto qualunque del cilindro su cui sta l'elica, ma da un punto della curva stessa (v. p. 256). In seguito vengono studiate altre da curve meno semplici, quali le evolventi successive di un circolo e in particolare la spirale di Sturm. A questo punto l'A. devia un po' dal sentiero percorso per dar notizia delle numerose curve speciali designate col nome di spirali: spirale di Galileo, spirale di Fermat, spirale parabolica, lituo, ecc. Dopo tale disgressione riprende lo studio delle trocoidi speciali, occupandosi delle notissime curve di Delaunay, generate dal fuoco di una conica che ruzzola sopra una retta, ed in particolare della comune catenaria; ciò lo porta a notizia di altre catenarie che vennero considerate e delle pseudocatenarie: la trattazione di tali curve dal punto di vista della geometria intrinseca trascina l'A. ad occuparsi delle spirali sinusoidi, delle curve di Ribaucour e di quelle di Cesàro.

Il titolo posto dall'A. alla V ed ultima Parte del suo volume (METODO DELLA MUTAZIONE DELLE COORDINATE) mostra che, nello scriverla, egli si è ispirato ad idee esposte di chi scrive il presente resoconto. Essa comprende anzitutto quattro paragrafi intitolati come segue: ***Passaggio da coordinate cartesiane e coordinate intrinseche o polari; le curve W; curve triangolari simmetriche; le radiali.*** La mancanza di spazio vietandoci di descriverne il contenuto, basterà che si avverta come si trovano ivi o contemplate da un nuovo punto di vista alcune curve anteriormente considerate o definite alcune altre linee che non avevano potuto venir ammesse in alcuna delle categorie già studiate. Un'altra applicazione del metodo della mutazione delle coordinate segnalata da E. Köstlin porta ad una nuova categoria di linee dette Arcuidi, le cui proprietà sia in generale che in alcuni casi speciali sono esposte nel penultimo § dell'opera in discorso. L'ultimo infine dà notizia della classificazione delle curve trascendenti note, proposta sette anni or sono e basata sul concetto di curve panalgebriche.

Descritto così il contenuto del volume del Dott. Wieleitner, aggiungeremo che lo stile rigoroso ma non pesante in cui è scritto ne rende piacevole la lettura, tanto più che esso è adorno di molte figure assai bene eseguite. Il libro non è sovraccarico di note; tuttavia non mancano notizie storiche e bibliografiche pienamente soddisfacenti, le quali sono bastanti in un primo studio del vasto tema. Se un appunto si potrebbe farsi alla trattazione è che non pone abbastanza in luce la grande importanza di certe vaste categorie di

Digitized by Google

curve i cui vari membri si ottengono variando certi esponenti o certi moltiplicatori, che entrano nelle corrispondenti equazioni, categorie le quali occupano un posto intermedio fra le curve affatto generali nel loro ordine e quelle specialissime su cui l'A. si arresta con non dissimulata e spiegabilissima compiacenza. Lo studio di tali classi di curve è assai istruttivo perchè porta a concludere come un semplice cambiamento nel valore assoluto o nel segno d'un esponente faccia totalmente cambiare l'aspetto della curva corrispondente, onde la topologia della classe mette in luce fenomeni strani ed interessanti. Non va taciuto che siffatti studi sono ben lungi dall'essere oggi completi; a dimostrarlo basta dire che una delle più semplici ed antiche categorie di curve note, quella delle curve di Lamè, solo di recente fu oggetto di un'esauriente ricerca topologica, atta a porgere un quadro e una classificazione delle forme sotto cui tali curve si possono presentare (1). Possa tale osservazione spingere qualche giovane volentoroso ad avventurarsi in uno dei pochi campi della geometria classica in cui è presumibile si possa raccogliere qualche frutto atto a compensare delle fatiche durate per coltivarlo.

G. L.

J. DE VARGAS Y AGUIRRE. — *Catalogo general de curvas.* Memorias de la Real Accademia de ciencias exactas, fisicas y naturales de Madrid, T. XXVI, 4°, p. 1030.

Al concorso bandito dall'Accademia di Madrid e del quale si fè cenno nel precedente resoconto ottenne l'*accessit* un lavoro in cui le parole « catalogo ordinato di curve » furono intese nel senso che l'Accademia chiedesse un catalogo alfabetico, tipo dizionario; tale senso non era quello che gli attribuiva il corpo scientifico proponente; tuttavia questo accolse nei propri Atti il relativo lavoro ed è quello appunto di cui ora vogliamo far cenno.

L'A. è un architetto; se non lo si apprendesse dal frontispizio della sua opera lo si dedurrebbe dal fatto che egli si è arrestato con visibile compiacenza ad esporre le costruzioni di curve composte di archi di cerchio raccordate, così di frequente usate dagli ingegneri; inoltre egli ha introdotte le definizioni di tutte le linee che s'incontrano nelle varie scienze (basti dire che non ha esclusa nemmeno la linea che segna sopra una catena di montagne, il limite delle nevi perpetue). Da tale punto di vista la sua opera si presenta come esuberante; per compenso è da ritenersi deficiente in quanto non dà notizia di tutte le curve speciali geometricamente definite

(1) Atti dell'Accademia Pontaniana. Napoli, 1909.

Digitized by Google

(p. es. non si trova alcuna notizia sopra la concoide di Sluse) e per altre ne fa solo un cenno sproporzionato all'importanza (p. es. considera destituite d'importanza le « curve di direzione » di Laguerre e le linee di 4° ordine con tre nodi d'inflesso il cui studio fu inaugurato dallo Schoute).

Una serie di articoli distribuiti in base all'iniziale dei titoli che portano non può essere opera organica onde riuscirebbe vano ogni tentativo inteso a descriverne il contenuto; ci è, quindi forza, limitarci a fare alcune osservazioni di dettaglio.

P. 117. L'A. annovera la catenaria di egual resistenza fra i casi speciali dell'ordinaria catenaria, il che assolutamente è inamissibile da chiunque abbia presenti le definizioni e le equazioni di tali linee.

P. 297. La definizione delle curve di Lamé è troppo ristretta, perchè comprende solo quelle per cui l'indice è un positivo espresso dal quoziente di un numero pari per un numero dispari.

P. 949. L'A. dà delle « curve trascendenti » una definizione che in ultima analisi è insignificante perchè comprende anche le curve algebriche, cioè abbraccia tutte le linee suscettibili di definizione geometrica; egli infatti ritiene trascendente una curva quando è rappresentata in un certo sistema di coordinate col mezzo di un'equazione in cui entrano funzioni trascendenti; in conseguenza ascrive ad es. fra tali curve la rosa a quattro foglie.

P. 320. Nell'articolo intilolato « genere » si cerca invano il significato che oggi generalmente si attribuisce a tale parola.

P. 909. L'A. sembra dubitare dell'indentità della logociclica con la strofoide retta. Ciò ne induce a osservare che in generale una grave menda nel lavoro in discorso sta nell'avere l'A. trascurato di segnalare l'indentità di curve aventi nomi diversi e differenti definizioni; il lettore che intende persuadersi della verità di ciò paragoni le pagine 225, 294, 295, 301, 662 risp. con le pagine 927, 997, 661, 663, 848.

L'A. mostra di avere fatti larghi studi, dando prova di molta erudizione; sono però da deplorarsi i frequenti errori nell'ortografia dei nomi propri e più ancora la riproduzione imperfetta di molti titoli di lavori.

L'opera va adorna di molte incisioni in legno; e finisce con un' « indice delle curve studiate »; comprendente un migliaio di nomi e con un indice degli autori citati.

Chiuderemo osservando come l'A. non sembra avere tenuto alcun conto delle assennate critiche che gli erano state mosse in occasione del concorso surricordato (v. *Annuario de la R. Acad. de ciencias etc.*, 1900, p. 339 e segg.), ma ha pubblicato il suo lavoro senza giovarsi nemmeno delle pubblicazioni sull'argomento che videro la luce in quest'ultimo decennio.

G. L.

Digitized by Google

Geometria elementare

F. ENRIQUES E U. AMALDI. — *Elementi di geometria ad uso delle scuole secondarie superiori.* III[a] edizione. Replica ad una Recensione (v. questo vol. *Bollettino,* p. 83).

Ringrazio il Dott. Amato della enumerazione di errori di stampa che egli ha voluto inserire nella sua recensione degli Elementi di Geometria ad uso delle Scuole Secondarie Superiori (III ediz.), di F. Enriques e miei. Noto per altro che, contrariamente a quanto egli afferma, non v'è alcuna omissione nell'enunciato (n. 735. pag. 468): *Se in due tetraedri di basi uguali si dividono le altezze nel medesimo numero di parti uguali e pei punti di divisione si conducono in ciascun tetraedro i piani paralleli alla base rispettiva, le sezioni, che così si ottengono, dei due angoloidi, sono a partire dal vertice ordinatamente uguali.* — Non è chi non veda come questo teorema sia esatto e come esso sia un immediato corollario della proposizione, da noi enunciata e dimostrata nel precedente n. 734 (1).

Non mi indugerò a discutere i criteri didattici del recensore, i quali appaiono in più punti assai discosti da quelli, cui fu ispirato il libro e a cui ha fatto benevola accoglienza il pubblico degli insegnanti. Ma mi fermerò sopra una osservazione di maggior rilievo, che il Dott. Amato muove contro la trattazione della teoria dei numeri irrazionali, che noi, in quest'ultima edizione, per uno scopo scientifico e didattico insieme, abbiamo stabilito su basi geometriche.

In una sua Nota, pubblicata alcuni mesi fa nel « Pitagora », il Dott. Amato aveva posto in dubbio la legittimità, nell'ordine logico di quella nostra trattazione, dell'enunciato seguente (n. 535, pag. 346): *Se quattro segmenti sono in proporzione, anche le loro misure rispetto ad una qualsiasi unità sono proporzionali, e viceversa, ecc.*

Non appena io ebbi notizia della pubblicazione del Dott. Amato, mi feci premura di scrivergli, richiamando la sua attenzione sui punti seguenti del nostro trattato:

1.° definiamo il *numero irrazionale* come *rapporto* di due grandezze geometriche (nn. 517, 519; pagg. 332, 336);

(1) Se in un tetraedro si divide l'altezza in n parti uguali e pei punti di divisione si conducono i piani paralleli alla base, si ottengono n-1 triangoli sezioni dell'angoloide al vertice, i cui lati sono, partendo dal vertice, uguali rispettivamente ad $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$, . . ., $\frac{n-1}{n}$ dei lati paralleli del triangolo base.

Digitized by Google

2.° dimostriamo, in base a ciò e alla definizione di proporzionalità per grandezze geometriche, che: *Se due coppie di grandezze* (n. 520, pag. 336) *sono proporzionali, i loro rapporti sono eguali: e, viceversa, ecc.*;

3.° definiamo, geometricamente, le operazioni fondamentali sui numeri irrazionali [mettendo in luce per ciascuna di esse la validità delle leggi formali] (nn. 524, 530, pagg. 340, 344);

4.° dimostriamo che *il quoziente delle misure di due segmenti, rispetto ad una qualsiasi unità, è uguale al rapporto dei due segmenti considerati.*

Discende di qui immediatamente che *se quattro segmenti sono in proporzione, il quoziente delle misure del primo e del secondo è uguale al quoziente delle misure del terzo e del quarto; e, viceversa, ecc.*

Ed è questa appunto la proposizione, contro cui mosse la sua critica il Dott. Amato, e che noi enunciammo sotto la forma da me testualmente riprodotta dapprincipio, perchè, dopo avere esteso al campo ampliato dei numeri reali le operazioni dell'Aritmetica, soddisfacendo al principio della conservazione delle proprietà formali non può ingenerare equivoci l'usare senz'altro per gli irrazionali, come già pei numeri razionali, la locuzione di « proporzionalità di quattro numeri $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, » come equivalente a quella di « uguaglianza dei quozienti $\alpha : \beta, \gamma : \delta$ ».

Tutto questo io scrissi privatamente al Dott. Amato già parecchi mesi or sono. Ma egli evidentemente non ha voluto tenerne conto, poichè ora torna a sollevare per le stampe e in forma vaga i medesimi dubbi.

Di fronte a ciò ho creduto opportuno di scrivere queste righe, perchè altri possa valutare tanto la critica del Dott. Amato quanto la mia risposta.

Carpaneto (Piacenza), Settembre 1909. UGO AMALDI

Invarianti differenziali

F. EDMUND WRIGHT. — *Invariants of quadratic differential forms* Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, 1908.

In questo nitido volumetto — il IX della collezione — il signor Wright raccoglie gli elementi della teoria invariantiva delle forme differenziali quadratiche, ed espone i principali metodi con cui l'argomento venne trattato. È un'opera utilissima a chi voglia in breve rendersi conto di un soggetto così importante, e voglia, prima di darsi a ricerche maggiori, o ad applicazioni geometriche o mecca-

Digitized by Google

niche, scegliere il metodo che più si adatti alla propria particolare ricerca.

La forma è semplice.

L'Introduzione mostra quale significazione geometrica si possa dare alle forme differenziali quadratiche in due variabili: applica loro un trasformazione di coordinate e definisce l'invariante di Gauss. Porta infine l'argomento sulle forme differenziali quadratiche in più variabili, additandone le principali interpretazioni geometriche e meccaniche.

Nel I Capitolo sono notizie storiche sui vari metodi di ricerca: quello dovuto originariamente al Christoffel, e che il Ricci perfezionò, traendone gli eleganti procedimenti del *Calcolo* che egli chiamò *Differenziale Assoluto:* quello del Lie (la teoria dei gruppi) che lo stesso Wright applicò alla ricerca dei parametri differenziali: quello simbolico del Maschke.

Al metodo del Christoffel e al Calcolo Differenziale Assoluto è dedicato il II Capitolo, dove è opportunamente riassunto quanto su tale Calcolo esposero il Ricci stesso e il Levi-Civita in una Memoria nei *Mathematischen Annalen.*

Nel III Capitolo sono esposti gli elementi della *teoria dei gruppi* del Lie e la loro applicazione alla ricerca degli invarianti differenziali.

Infine il Capitolo IV, che completa la parte generale, svolge l'argomento col metodo simbolico del Maschke. Del qual metodo, non molto noto fra noi, dirò che è una ingegnosa applicazione alle forme differenziali, del metodo simbolico già usato per gli invarianti delle forme algebriche.

L'ultimo capitolo poi tratta dell'interpretazione geometrica degli invarianti, con speciale applicazione al caso di *due* e *tre* variabili. L'A. introduce col Ricci (dei cui metodi di calcolo si serve poi sino alla fine del volumetto) gli invarianti canonici di una *ennupla* ortogonale (i γ a tre indicici del Ricci), ricavandone le formole di Mainardi e Codazzi generalizzate, e le proprietà più semplici di alcune particolari congruenze di curve.

Il capitolo e il libro si chiudono con un cenno sulle applicazioni dinamiche, con le equazioni della dinamica in forma invariantiva e per ultimo col problema — importantissimo dal lato meccanico — della rappresentazione di una varietà sopra un'altra con conservazione delle linee geodetiche.

Anche quest'ultima parte riuscirà assai utile allo studioso che voglia applicarsi a ricerche geometriche o meccaniche, e lo indurrà forse a prescegliere la via del Calcolo Differenziale Assoluto. Poichè di questo, su cui maggiormente l'A. s'indugia, appare evidentemente la potenza anche attraverso alle succinte notizie del libro.

F. A. DALL'ACQUA

Digitized by Google

INDICE DEI NOMI

Abel 110.
dall'Acqua 128.
d'Adhémard 55.
Ahmes 65.
Ahrens 8, 9.
d'Alembert 110.
Allman 102.
Amaldi 83, 85, 110, 126, 127.
Amato 85, 126, 127.
Amodeo 98.
Amiot 98.
Antifonte 101.
Antomari 17.
Apollonio 3, 106.
Archimede 2, 2 *n.*, 29, 102, 106, 123.
Aristotele 101.
Arzelà 117, 120.
Aschieri 98.
Ascoli 117, 120.
Auerbach Fr. 88.
» Felix 88.
Autolico 32.

Bachet 106.
Bachmann 49, 51.
Bahascara 96.
Baire 117.
Ball 99.
Baltzer 33.
Barbarin 98.
Battaglini 87, 87 *n.*
Beltrami 98.
Bernoulli 3, 104, 121.
Bertini 41, 48.
Bertrand 33, 37.
Beez 98.
Bessel 88, 116.
Beudon 55.
Bierens de Haan 54.
Bigourdan 88.
Bjornbö 95.
Bobek 98.
Bobynin 33.
Bögen 98.
du Bois-Regmond 95.
Boezio 2.
Boggio 31.
Bohlmann 56.
Bolduan 81.
Bolyai 38.
Bolza 94.
Bonola 6, 91, 98.
Boole 18.
Bordin 31.
Bourget 11.
Brandes 81.
Borel 117.
von Braunmühl 33, 60, 64.
Bretschneider 102.
Brewster 8.
Brioschi 25, 80, 92.
Brückner 75, 76.
Buchbinder 98.
Büchel 2.
Burali-Forti 95, 98.
Budan 110.
Burckhardt 107, 108.

Caetani di Sermoneta 92.
Cajori 33, 37.
Cantor M. 1, 2, 10, 33, 33 *n.*, 63, 65, 99, 102.
Cantor G. 78, 95.
Caldarera 86, 87.
Carnot 77.
Castelnuovo 64.
Catalan 121.
Cauchy 55, 76, 77, 78.
Cavalieri 104.
Cayley 47, 106.
Cesàro 123.
Chasles 17, 40, 98.
Christensen 94.
Christoffel 128.
Chini 18, 20.
Ciani 48.
Cicerone 3.
Cipolla 51, 53.
Claeyes 26.
Clebsch 17.
Codazzi 128.
Copernico 62.
Couturat 95.
Cowley 81.
Cremona 18 33 *n.*, 14, 86, 98.
Crone 94.

Daniele 20.
Darbes 103.
Darwin 6.
Daviet de Foncenex 34.
Dedekind 50, 51, 111.
Delaunay 123.
Deruyts 7, 26.
Descartes 106, 110, 121, 122.
Diels 102.
Dini 57, 58.
Diofanto 2, 106.

Digitized by Google

Doehlemann 88, 40, 98.
Duhem 31, 96.
Duporc 98.
Durége 58, 60.
Durero 122.
von Dyck 60, 62.

Eisenstein 49.
Emch 98.
Eneström 1 *n*, 63,
Enriques 24, 31, 83, 85, 98.
Erler 98.
Erodoto 5.
Erone 1, 32.
Euclide 5, 6, 51, 96, 101, 102, 105, 106, 107.
Eudesso 122.
Eulero 3, 8, 13, 50, 51, 52, 103, 104.

Fagnano 3.
Fano 98.
Faraday 6.
Fazzari 10.
Federico II 103.
Ferdinando III 104.
Fermat 23, 50, 52, 53, 92, 93, 106, 123.
Fibonacci 104.
Fiedler 28, 98.
Finsterwalden 60.
Flauti 98.
Fleischer 24.
Fontenelle 77.
Fourier 22, 57, 110.
Francoeur 31.
Fränkel 94.
Fréchet 117, 120.
Fricke 67.
Frischauf 98.
Fubini 55, 67, 73.
Fuchs L. 10.
Fuchs R. 10
Fuhrmann 22, 57, 110.
Fukusawa 74.
Furtwangler 53.
Fuss 9.

Gaillet 31.
Galileo 62, 104, 123.
Gallenkamp 98.
de Gasparis 102 *n*.
Gaultier 3.
Gauss 34, 49, 50, 51, 52, 59, 99, 114.
Geissler 95.
Geiser 98.
Genocchi 106.
Gérard 98.
Gergonne 3.
Giacomini 31.
Giambelli 27.
Gilmont 91.
Girard 37.
G. L. vedi Loria.
Goethe 103.
Gordan 80.
Goursat 55.
Gram 95.
Gretsehel 98.
Guarducci 84.
Gudermann 28.
Gundelfinger 86.
Gutberlet 95.
Gutzmer 29.
Guy 22.

Hadamard 31, 55.
Hagen 9, 12, 13.
Halsted 98.
Hamilton 6, 17.
Hancock 56.
Hankel 98.
Heath 105, 107.
Heger 28.
Heiberg 2, 2 *n*., 15, 96.
Hellinger 87.
Hensel 111, 117.
Hermite 10, 11, 12, 80.
Hess 15, 76.
Hesse 86.
Hessel 76.
Hilbert 50, 51, 52, 53, 72, 84, 92, 147.
Hjemslev 95.
Horner 110.
Hoüel 98.
Hultsch 32.
Huxley 6.
Huygens 102.

Ippocrate 2, 101, 102.
Ippia 123.

Jacobi C. G. J. 8, 9, 49, 95.
Jacobi M. H. 8.
Jensen 95.
Jessop 14, 15.
Jolles 38.
Jopke 82.
Juel 95.

Kelvin (Lord) 7, 88.
Keyser 13, 14.

Digitized by Google

Kiepert 80.
Killing 98.
Klein 15, 17, 24, 29, 31, 52, 67, 68, 72, 73, 80, 80 *n.*, 89, 91, 98.
Kneser 103.
Knoff 88.
Koebe 73.
Koeber 98.
Koenigs 17.
Königsberger 100.
Köstlin 80, 123.
Korn 31.
Kragh 95.
Kronecker 52.
Kummer 49, 52, 92, 111.

Lachlan 98.
Lacroix 62.
Lagrange 39, 403, 110.
Laguerre 25.
Laisant 21.
Lalande 31.
Lallemand 88.
Lambert 102.
Lampe 103, 104.
Lange 49, 98.
Larmor 6.
Lauricella 31.
Lazzarini 96.
Lazzeri 21.
Lebesgue 49, 117, 120.
Lefevre 99.
Legendre 49, 52, 102.
Leibniz 103, 106.
Lejeune-Dirichlet 50, 51.
Lemoine 31.
Léntheric 98.
Lesser 30 *n.*
Levi E. E. 73
Levi-Civita 128.
Lewis 31.
Lie 13, 68, 98, 128.
Liebmann 88, 98.
Lipschitz 110.
Lobatschewski 98.
Lorgna 103.
Loria 2, 4, 6, 8, 9, 10, 10 *n.*, 11. 12, 13, 14, 17, 18, 21, 23, 24, 28, 29, 31, 33, 54, 57, 59, 60, 67, 73, 77, 79, 86, 89, 91, 99, 100, 101, 102, 104, 105, 106, 124, 125.
Lucas 99.

Macdonald 98.
Maier 98.
Mainardi 128.
Malus 17.
Mansion 24, 26, 98.
Manuzio 101.
Mackoff 11.
Martin 99.
Maschke 93, 94, 128.
Maurer 58, 60.
Maxwell 6.
Milinowski 98.
Minkowski 52.
Möbius 53.
Mollrup 96.
Monge 42, 43, 46, 48.
Morgenstern 79.
Müller F. 99, 101, 103, 104.
Münger 122.

Nallino 10 *n.*
Nepers 106.
Nesselmann 100.
Neuendorff 81.
Neumann 7, 3, 4.
Newton 6, 8, 12, 37, 100, 113.
Nielsen 95.
Noether Emmy 81.

Obrecht 91.
Osgood 117.
Oughtred 22.

Pagliero 73, 74.
Palatini 83, 84.
Palmieri 21.
Pappo 29, 32.
Pascal B. 13, 25, 106, 122.
Pasch 78.
Pauly-Wissowa 32.
Peano 17. 93, 117.
Peirce 18.
Pell 50.
Perseo 121.
Petit-Bois 54.
Petit d'Ormoy 31.
Picard 11, 55.
Pincherle 109, 110.
Pitagora 5, 6.
Plimton 108, 109.
Plücker 14, 47.
Poincarè 72, 73, 98.
Poinsot 76, 123.
Poncelet 26, 31.
Pontécoulant 31.
Porta 101.
Proclo 106.

Digitized by Google

del Re 17, 18.
Reinhard 61.
Renard 31.
Reye 37, 38.
Ribancour 123.
Riccati 3.
Ricci 104, 128.
Richard 98.
Rieder 80.
Riemann 55, 58, 59, 72, 73.
Roegner 81.
Rolle 110.
Rottok 98.
Rozé 79.
Rudio 2, 32, 101, 102.
Ruffini 110.
Russell 95, 98.

Salmon 28.
Sannia 98.
Scheefer 117.
Scheffers 56.
Scheibner 53, 54.
Scheiner 62.
Schimmack 29.
Schläfli 98.
Schlesinger 10.
Schlömilch 54.
Schmidt M. C. P. 5, 6.
Schmidt K. 82.
Schmidt R. 82.
Schoenflies 117, 120.
Schon 95.
Schoute 125.
Schröder 18.
Schröter 98.
Schubert 22, 23, 41.
Seeger 98.
Sella 79.
Serenai 104.
Serret J. A. 56.
Servais 24, 26, 104.
Severi 31, 98.
Simon 106.
Simplicio 101.
Smith 4, 96, 108, 109.
Snellio 23.
Sommer 50, 51, 53.
Sonin 11.
Spengel 101.
Stäckel 9.
Staudigl 98.
Staudt 38, 41, 98.
Starotzik 86.
Steiner 4, 40, 41, 98.
Stokes 6, 8.
Struve 3.
Sturm C. 26, 110, 123.
Sturm R. 14, 38.
Stuyvaert 21, 22, 26, 27, 91.
Sylvester 12, 106.

Talete 5, 105.
Tannery J. 74. 96.
Tannery P. 96, 121.
Taylor 74.
Tchébychef 11.
Thomae 98.
Torelli 98.
Torricelli 104.
Torroja 98.
Tramontini 61.
Tropfke 33.
Tschirnhausen 54, 121.

von Uven 82.

Vacca 65.
Vahlen 98.
Vaillant 31, 32.
Valentin 103.
Valentiner E. 95.
Valentiner H. 95.
Vargas 124, 125.
Valz 31.
Vasillieff 11.
Vassura 104, 105.
Vecchietti 77, 79.
Veronese 118.
Viète 105.
Vivanti 21, 58, 75, 79, 95, 98, 117.
Viviani 104.
Vogt 5 *n.*
Voltens 55, 117.
Voss 17.

Waugerin 3, 4.
Watt 122.
Weber H. 22.
Weierstrass 59, 74.
Weisse 80.
Werner 83.
Wessel 59.
Weyr Em. 98.
Wieleitner 120, 124.
Wilson 52.
Wölffing 88.
Wolfskehl 92.
Wright 127, 128.

Young 117.

Zeuner 100.
Zeuthen 2 *n.*, 94, 95, 96.
Zindler 15, 17.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

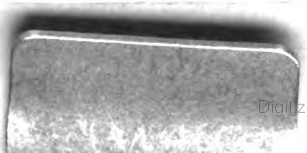
Digitized by Google

Digitized by Google

366167

QA
1
.B7
V.10-11

Sci



Digitized by Google

UNIVERSITY OF CHICAGO
63 387 008